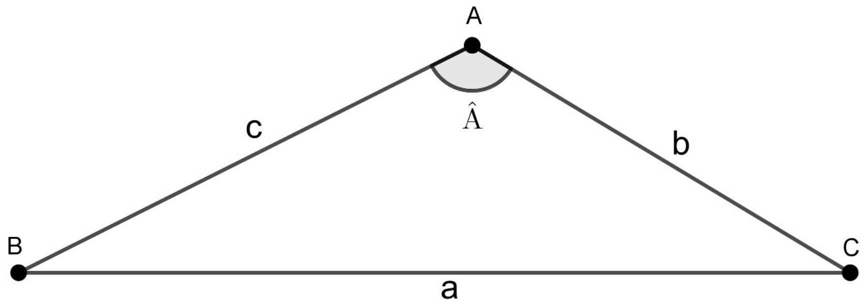
PARTIE 1

L’objectif est de démontrer le théorème d’Al-Kashi qui énonce que sur un triangle de longueurs a, b et c on a la relation suivante :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$.



1/

a/ Montrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AC}\|^2$.

b/ En déduire que : $bc\cos(\hat{A}) + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} = b^2$.

2/ Montrer que :

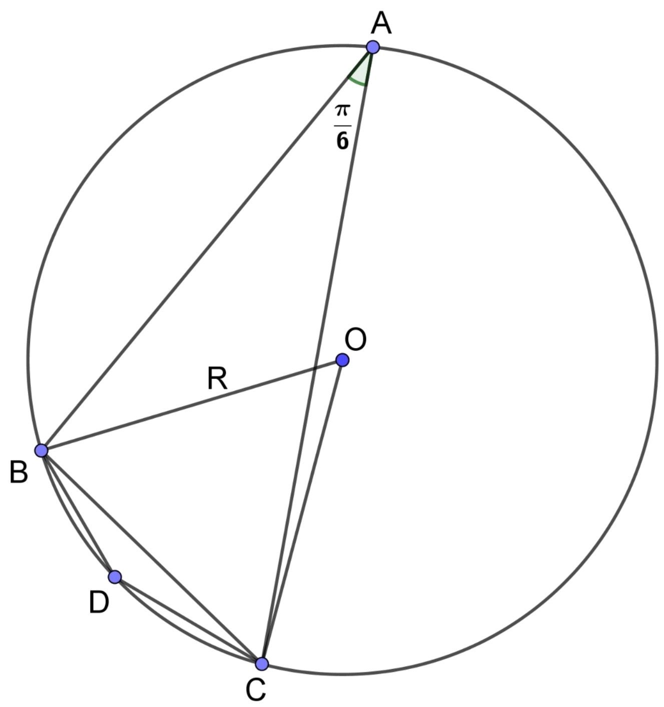
- $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + a^2$.
- $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = -c^2 + bc\cos(\hat{A})$.

3/ En déduire la formule d’Al-Kashi.

PARTIE 2

On considère un cercle de centre O et de rayon R et 4 points du cercle A, B, D, C tels que :

- $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{6}$.
- BD = DC = a.



1/ Que valent les angles $\widehat{BOC}$ *et* $\widehat{BDC}$?

2/ Montrer que (BOC) est un triangle équilatéral.

3/ On donne $\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$. En appliquant le théorème d’Al-Kashi démontrer que :

$R^2=a^2(2+\sqrt{3})$.

4/

a/ Développer : $(1+\sqrt{3})^2$.

b/ En déduire que : $R=\frac{a}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})$.