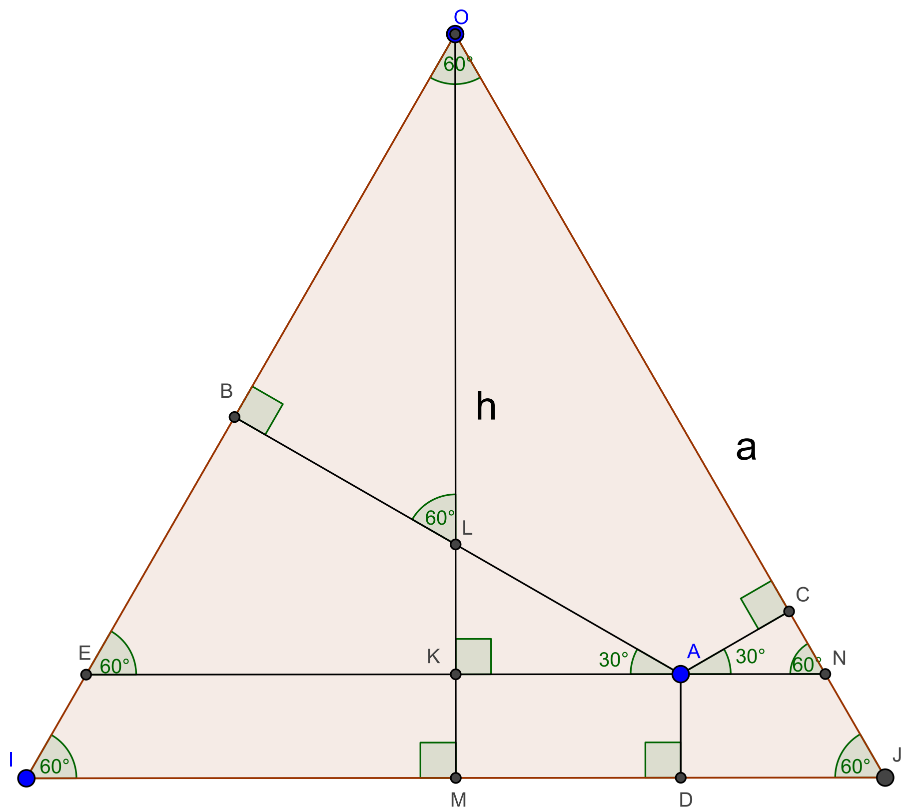

Soit a la longueur du côté du triangle équilatéral et h sa hauteur.
(EN) la droite // à (IJ) passant par A. Les angles du triangle OEN valent tous 60° et le triangle est donc équilateral.
M le milieu de [IJ] donc (OM) $\perp$ (IJ).

$\sin(60°) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

(IJ)//(EN) donc on peut appliquer Thalès en O : $\frac{OE}{OI} = \frac{OK}{OM} = \frac{EK}{IM}$

donc $\frac{OE}{a} = \frac{h - AD}{h} = \frac{2EK}{a}$

soit (1) : $OE = a(\frac{h - AD}{h})$

et (2) : $EK = \frac{OE}{2}$

ABE triangle rectangle en B donc : $\sin(60) = \frac{AB}{AE}$

ACN triangle rectangle en C donc : $\cos(30) = \frac{AC}{AN}$

De plus le triangle OEN est équilatéral donc OE = EN.

en appliquant (2) : EN = EK + KA + AN donc $OE = \frac{OE}{2} + KA + \frac{AC}{\cos(30)}$

soit **(3) :** $\mathbf{\frac{OE}{2} = KA + \frac{2AC}{\sqrt{3}}}$

$\tan g(\widehat{BAE}) = \tan g(30) = \frac{BE}{AB} = \frac{OE - OB}{AB}$ donc OB = OE-ABtang(30) = OE - $\frac{AB}{\sqrt{3}}$

OBL triangle rectangle en B donc $\sin(60) = \frac{OB}{OL}$ donc $OB = OL\sin(60) = OL\frac{\sqrt{3}}{2}$

En remplaçant OB dans l'équation précédente on obtient :

$OL\frac{\sqrt{3}}{2} = OE- \frac{AB}{\sqrt{3}}$ donc (4) : $OL = \frac{2OE}{\sqrt{3}} - \frac{2AB}{3}$

$KL = OK\text{-}OL = OK\text{-} \frac{2OE}{\sqrt{3}} + \frac{2AB}{3}$

Or d'après Thalès $\frac{OE}{OI} = \frac{OK}{OM}$ donc $\frac{OE}{a} = \frac{OK}{h}$ donc $OK = \frac{hOE}{a} = \frac{OE\sqrt{3}}{2}$

$KL = \frac{OE\sqrt{3}}{2} - \frac{2OE}{\sqrt{3}} + \frac{2AB}{3} = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}})OE + \frac{2AB}{3}$

or $\tan g(30) = \frac{KL}{KA}$ car ALK triangle rectangle en K donc $KA = \sqrt{3}KL$

donc $KA = -\frac{OE}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}AB$. En remplaçant dans (3) on obtient :

$OE = \frac{2}{\sqrt{3}}AB + \frac{2AC}{\sqrt{3}}$ et en appliquant (1) :

$(\frac{a\sqrt{3}}{2}\text{-}AD)\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}AB + \frac{2}{\sqrt{3}}AC$

donc $\mathbf{AD + AB + AC = \frac{\sqrt{3}}{2}a = h}$ ce qu'il fallait démontrer.

Il existe une autre démonstration basée sur les aires et plus rapide. Celle ci est le fruit de mon imagination !