Problème

PARTIE A

1.

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt \ \ x\in I=]-1;1[$.

1.a

$\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{(1-t)(1+t)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t})$.

1.b

$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t}dt+\frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1-t}dt=\frac{1}{2}[\ln(1+t)]_0^x-\frac{1}{2}[\ln(1-t)]_0^x$

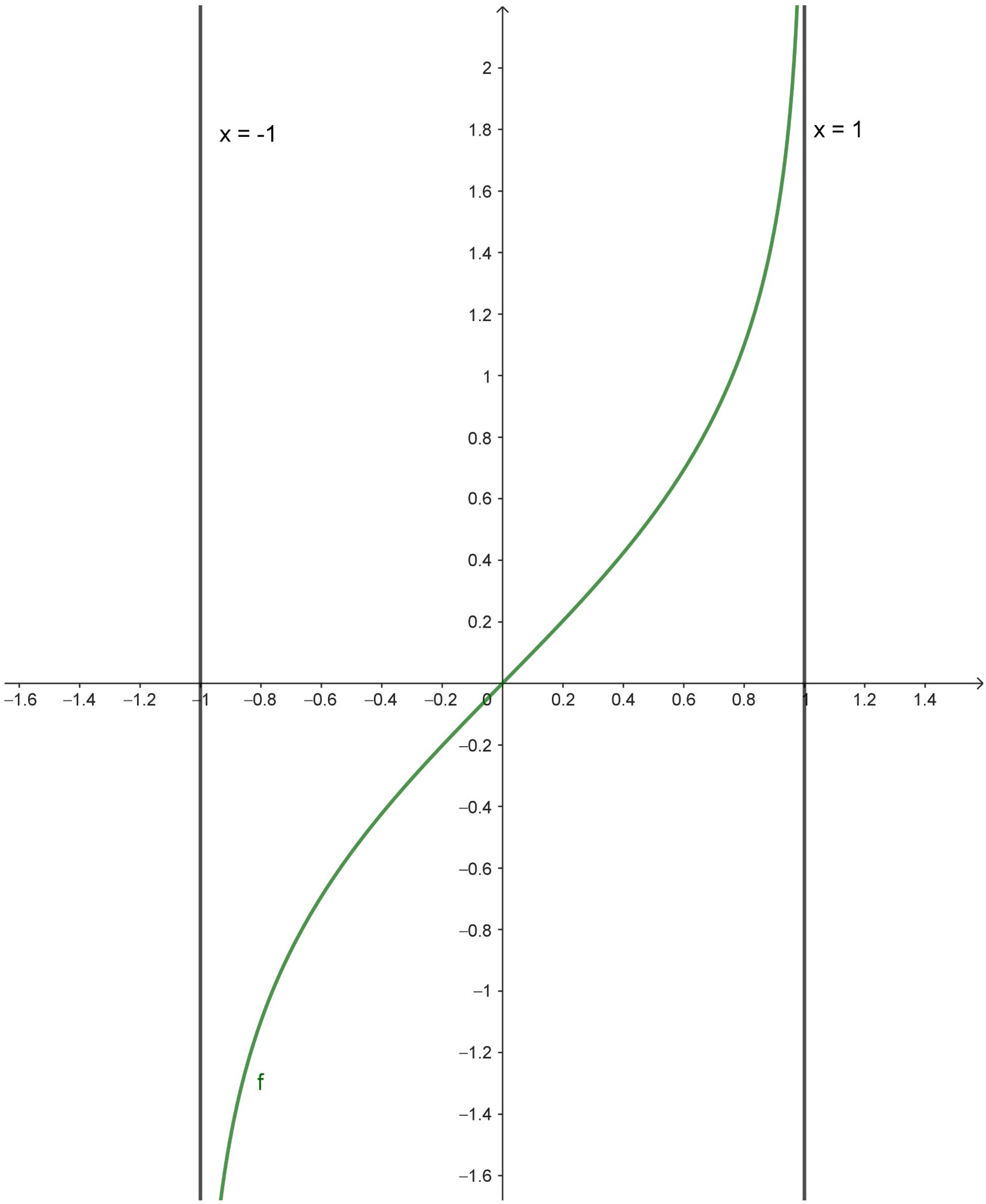
$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

$f(-x)=-f(x)$, donc f est impaire. La fonction f est continue et dérivable sur I et si F désigne la primitive de la fonction $g(x)=\frac{1}{1-x^2}$ alors :

$f'(x)=(F(x)-F(0))'=\frac{1}{1-x^2}$, donc $\forall x\in I, f'(x)>0$

$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$

$\lim_{x\to -1} f(x)=-\infty$


x = -1
x = 1
f
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1.2
−1.4
−1.6
0.2
0.4
0.6
0.8
1.2
1.4

2.

La fonction f est strictement croissante et continue sur I, donc f est bijective sur I.

soit u>0 f(x)=ln(u) donc il existe une et une seule solution x Є I telle que:

$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(u)$

$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(u^2)$

$\frac{1+x}{1-x}=u^2 \ soit \ x(1+u^2)=u^2-1$

donc $x=\frac{u^2-1}{u^2+1}$.

PARTIE B

On pose $r=\frac{p}{q}$ $p\in\mathbb{N}$ $q\in\mathbb{N}$ avec p et q premiers entre eux et r>1.

$\mathbb{N}'$ désigne l'ensemble des entiers strictement supérieurs à 1.

1

Soient a et b deux entiers premiers entre eux avec a>b . Soit d =pgcd (a+b, a-b) alors

d/ a+b et d/ a-b donc d / a+b -(a-b)=2b et d/ a+b + a-b= 2a.

$\begin{cases} d/2a \\ d/2b \end{cases}$ donc d/ pgcd(2a,2b) or pgcd(2a,2b) = 2 pgcd(a,b)=2 car a et b premiers entre eux.

Donc d/2, soit d=1 ou d=2.

Si a et b impair alors a+b pair et a-b pair donc d=2.

Si a et b ont des parités différentes alors a+b impair et a-b impair donc d=1.

2.

$f(\frac{1}{m})=\ln(r)$ $m\in\mathbb{N}'$ donc $\frac{1}{m}\in I$ et r >1.

D'après 2. on a :

$$\frac{1}{m}=\frac{r^2-1}{r^2+1}$$
$$m=\frac{r^2+1}{r^2-1}=\frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}$$

p^2 et q^2 premiers entre eux donc pgcd (p^2+q^2, p^2-q^2) = 1 ou 2 d'après 1/.

- Si pgcd (p^2+q^2, p^2-q^2) =1 :

  $\begin{cases} p^2+q^2=u \\ p^2-q^2=v \end{cases}$ avec u et v premiers entre eux

  donc $m=\frac{u}{v}$ donc v=1 car $m\in\mathbb{N}'$.

  $\begin{cases} p^2+q^2=u \\ p^2-q^2=1 \end{cases}$ donc $(p-q)(p+q)=1$ impossible car q est un entier non nul.

- Si pgcd (p^2+q^2, p^2-q^2) =2 :

  soit $\begin{cases} p^2+q^2=2u \\ p^2-q^2=2v \end{cases}$ avec u et v premiers entre eux

  donc $m=\frac{u}{v}$ donc v=1 car $m\in\mathbb{N}'$.

  $\begin{cases} p^2+q^2=2u \\ p^2-q^2=2 \end{cases}$ donc $(p-q)(p+q)=2$ donc :

  Soit $\begin{cases} p+q=2 \\ p-q=1 \end{cases}$ *donc* $2p=3$ impossible car p entier naturel.

  Soit $\begin{cases} p+q=1 \\ p-q=2 \end{cases}$ *donc* $2p=3$ impossible.

Il en résulte que l'équation n'admet aucune solution.

3

a.

$$2f(\frac{1}{m})=\ln(2)$$

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{m}}\right)=\ln(2) \text{ donc } \frac{1+\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{m}}=2 \quad 3(\frac{1}{m})=1 \text{ donc m=3.}$$

$$2f(\frac{1}{m})=\ln(4)$$

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{m}}\right)=\ln(4) \text{ donc } \frac{1+\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{m}}=4 \quad 5(\frac{1}{m})=3 \text{ donc } m=\frac{5}{3} \textit{ impossible car } m\in\mathbb{N}'.$$

b.

$$2f(\frac{1}{m})=\ln(r)$$

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{m}}\right)=\ln(r) \quad \frac{1+\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{m}}=r \quad (1+r)(\frac{1}{m})=r-1 \text{ soit } m=\frac{r+1}{r-1} \text{ donc } m=\frac{p+q}{p-q}.$$

D'après 1/ :

- si p et q ont des parités différentes alors pgcd(p+q, p-q) =1 donc m ne peut être un entier que si $\begin{cases} p+q=v \\ p-q=1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} p=\frac{v+1}{2} \\ q=\frac{v-1}{2} \end{cases}$ donc v = 2k+1 et $r=\frac{2k+2}{2k}$ et $r=1+\frac{2}{2k}$ et m=2k+1.

  Inversement si $r=1+\frac{2}{2k}$ alors m=2k+1 solution de l'équation.

- Si p et q sont tous les deux impairs alors pgcd(p+q, p-q) =2 donc :

  $\begin{cases} p+q=2u \\ p-q=2v \end{cases}$ avec u et v premiers entre eux et $m=\frac{u}{v}$ donc v=1.

  $\begin{cases} p+q=2u \\ p-q=2 \end{cases} \begin{cases} p=u+1 \\ q=u-1 \end{cases}$ u pair (2k) soit $r=\frac{u+1}{u-1}=1+\frac{2}{u-1}=1+\frac{2}{2k-1}$ et m=2k.

  Inversement si $r=1+\frac{2}{2k-1}$ alors m=2k est bien solution de l'équation.

En conclusion, si $r=1+\frac{2}{K}$ avec K entier pair ou impair alors l'équation à une solution m=K+1.

4.

Equation à 2 inconnues :

$f(\frac{1}{m})+f(\frac{1}{n})=\ln(r)\ (m,n)\in \mathbb{N}'\times\mathbb{N}'$.

a.

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m+1}{m-1}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\ln(r)$$

$$\ln\left(\left(\frac{m+1}{m-1}\right)\times\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)=\ln(r^2)$$

$$\left(\frac{m+1}{m-1}\right)\times\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=r^2 \quad (m+1)(n+1)=r^2(m-1)(n-1)$$

$mn(r^2-1)-(m+n)(r^2+1)+r^2-1=0$ on a r>1 donc

$$mn-(m+n)\frac{r^2+1}{r^2-1}+1=0$$

$$(m-s)(n-s)=t \text{ donc } mn-(m+n)s+s^2=t$$

donc

$s=\frac{r^2+1}{r^2-1}$ $\quad s^2-t=1$ donc $t=\left(\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)^2-1=\frac{(r^2+1)^2-(r^2-1)^2}{(r^2-1)^2}=\frac{2r^2(2)}{(r^2-1)^2}$

$t=\frac{4r^2}{(r^2-1)^2}$ et $s=\frac{r^2+1}{r^2-1}$.

b.

$f(\frac{1}{m})+f(\frac{1}{n})=\ln(2)$.

r=2 donc $t=\frac{16}{9}$ $s=\frac{5}{3}$ $(m-\frac{5}{3})(n-\frac{5}{3})=(\frac{4}{3})^2$

la seule solution pour m et n dans $\mathbb{N}'$:

$\begin{cases} m-\frac{5}{3}=\frac{4}{3} \\ n-\frac{5}{3}=\frac{4}{3} \end{cases}$ donc m=n=3.

$f(\frac{1}{m})+f(\frac{1}{n})=\ln(4)$

r=4 donc $t=\frac{64}{15^2}=(\frac{8}{15})^2$ et $s=\frac{17}{15}$

$(m-\frac{17}{15})(n-\frac{17}{15})=(\frac{8}{15})^2$.

$\begin{cases} m-\frac{17}{15}=\frac{8}{15} \\ n-\frac{17}{15}=\frac{8}{15} \end{cases}$ n'admet pas de solutions entières. Idem pour : $\begin{cases} m-\frac{17}{15}=\frac{64}{15^2} \\ n-\frac{17}{15}=1 \end{cases}$

$\begin{cases} m-\frac{17}{15}=\frac{16}{15} \\ n-\frac{17}{15}=\frac{4}{15} \end{cases}$ ou $\begin{cases} m-\frac{17}{15}=\frac{32}{15} \\ n-\frac{17}{15}=\frac{2}{15} \end{cases}$ n'admettent pas de solution entière.

Cette équation n'admet donc aucune solution.