∽ Baccalauréat C Étranger groupe I juin 1980 ∾

EXERCICE 1

1. Le conjugué d'un élément z de $\mathbb{C}$ est noté $\overline{z}$. Soit E l'ensemble des éléments u de C tels que

$$u + \overline{u} + u\overline{u} = 0.$$

Représenter l'ensemble des images des éléments de E.

2. Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$, on considère un triangle équilatéral ABC de centre (OA = OB = OC). Soit S l'ensemble des similitudes directes s de $\mathscr{P}$ telles que

$$(s(\mathrm{O}) = \mathrm{O}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{A},\ s(\mathrm{B}),\ s(\mathrm{C}) \text{ sont alignés}).$$

Préciser l'ensemble décrit par $s(\mathrm{A})$ lorsque s décrit S.

EXERCICE 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension trois, rapporté à une base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$; $\mathrm{O_E}$ désigne l'endomorphisme nul de E.
On se propose de déterminer

— un endomorphisme f de E tel que $f\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \overrightarrow{\jmath}$,

— un endomorphisme g de E tel que $g\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = \overrightarrow{k}$,

ces endomorphismes satisfaisant en outre aux relations

$$f \circ f = \mathrm{O_E}, \quad g \circ g = \mathrm{O_E}, \quad f \circ g = g \circ f$$

1. On suppose qu'un tel couple $(f,\ g)$ d'endomorphismes existe. Démontrer que l'on a nécessairement

$$f\left(\overrightarrow{k}\right) = g\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = \overrightarrow{0}, \quad f \circ g = \mathrm{O_E}.$$

2. Combien le problème posé admet-il de solutions ?

PROBLÈME

Partie A

Soit f une primitive, sur $\mathbb{R}$, de l'application φ qui, à tout réel t, associe

$$\varphi(t) = \frac{1}{+2t^2 - 2t + 1}.$$

1. Soit g l'application de l'intervalle $\mathrm{S} = \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ +\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(u) = f\left(\frac{1 + \operatorname{tg} u}{2}\right).$$

Prouver que g est différentiable sur S, puis que g est une fonction affine.

2. Montrer que 1t e dt

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{1}{+2t^2 - 2t + 1}\,\mathrm{d}t.$$

Partie B

On considère l'application I de $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$I(p,\ q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q \,\mathrm{d}t.$$

1. En majorant convenablement $t(1-t)$ pour $t \in [0\ ;\ 1]$, trouver la limite de la suite u telle que $u_0 = 1$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}^\star\right) \quad u_n = I(n,\ n)$.

2. Montrer que

$$\forall (p,\ q) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star, \quad I(p+1,\ q+1) = \frac{q+1}{p+2} I(p+2,\ q)$$

(on pourra utiliser une intégration par parties), puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad I(n, n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Partie C

1. Après avoir remarqué que

$$2t^2 - 2t + 1 = 1 - 2t(1-t),$$

simplifier

$$\frac{1}{2t^2 - 2t + 1} - 1 - \sum_{k=1}^{n} 2^k t^k (1-t)^k.$$

2. On considère la suite v telle que $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad v_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Quelle est la limite de la suite w telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k ?$$