Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C juin 1982 Nancy-Metz ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$17q - 11p = 2.$$

2. On désigne par $\overline{n}$ la classe d'équivalence modulo 187 de l'entier $n \in \mathbb{Z}$.
Résoudre dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \overline{1} = 0$.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - [(1+2\mathrm{i})u + 1]z + (-1+z)u^2 + \mathrm{i}u = 0$$

où z est l'inconnue complexe et u un paramètre complexe.
On appellera z' la racine qui est un polynôme du premier degré en u et dont le coefficient de u est $(1+\mathrm{i})$, z'' l'autre racine.

2. Dans le plan affine euclidien, on appelle P le point d'affixe u, M' celui d'affixe z', M'' celui d'affixe z''.
Par quelles transformations du plan passe-t-on de P à M' ? (On appellera T_1 cette transformation et on explicitera ses éléments géométriques). Puis de P à M'' ? (On appellera T_2 cette transformation et on explicitera ses éléments géométriques.)

3. Par quelle transformation T passe-t-on alors de M' à M'' ?
Donner les éléments caractérisant T.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

On considère la fonction numérique de la variable réelle f définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

2. Déterminer une fonction polynôme P, de degré inférieur ou égal à 3, qui a même valeur et même nombre dérivé que f en 0 et 1.

3. Soit k la fonction numérique définie par

$$k(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1.$$

Factoriser k et en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_\mathrm{P}$ courbes représentatives respectives de f et P dans un même repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormé du plan. Tracer soigneusement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_\mathrm{P}$. Faire figurer les tangentes aux points communs.

4. À l'aide d'un encadrement de $1+x$ pour $x \in [0\ ;\ 1]$, montrer que

$$\frac{1}{240} < \int_0^1 k(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{120}.$$

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 k(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x$.
6. Déduire des résultats précédents la valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\frac{n}{240} < \mathrm{Log}\,2 < \frac{n+1}{240}.$$

Partie B

On désigne par E l'espace vectoriel sur constitué par la fonction nulle et les fonctions polynômes, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.
Soit h un réel strictement positif et φ l'application de E vers $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}(0),\ \mathrm{P}'(0),\ \mathrm{P}(h),\ \mathrm{P}'(h).$$

1. Quelle est la dimension de E ? Montrer que φ est une application linéaire bijective de E sur $\mathbb{R}^4$.
2. Soit φ^{-1}, la bijection réciproque de φ. Déterminer $\mathrm{P}_3 = \varphi^{-1}((0,\,0,\,1,\,0))$ et $\mathrm{P}_4 = \varphi^{-1}((0,\,0,\,0,\,1))$.
3. Soit $\mathrm{P}_1 = 1 - \mathrm{P}_3$, et P_2 défini par $\mathrm{P}_2(X) = -\mathrm{P}_4(h-x)$.
   Vérifier que $\mathrm{P}_1 = \varphi^{-1}((1,\,0,\,0,\,0))$ et $\mathrm{P}_2 = \varphi^{-1}((0,\,1,\,0,\,0))$.
4. Calculer pour i élément de $\{1,\,2,\,3,\,4\}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^h \mathrm{P}_i(t)\,\mathrm{d}t$.
5. Montrer que tout élément P de E s'écrit comme une combinaison linéaire de P_1, P_2, P_3 et P_4. En déduire la relation, pour P élément de E,

$$\int_0^h \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{h}{2}(\mathrm{P}(0)+\mathrm{P}(h)) + \frac{h^2}{12}\left(\mathrm{P}'(0)-\mathrm{P}'(h)\right).$$

Partie C

Soit a un réel strictement positif et g une application de $[0\ ;\ a]$ vers $\mathbb{R}$ possédant des dérivées continues au moins jusqu'à l'ordre 4 sur $[0\ ;\ a]$. Soit $h \in]0\ ;\ a]$, et Q_h l'élément de E ayant même valeur et même nombre dérivé que g en 0 et h.

1. Montrer que g est intégrable sur $[0\ ;\ h]$ et, en utilisant les résultats de la partie B, qu'on a la relation

$$\int_0^h g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^h \mathrm{Q}_h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^h g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{h}{2}(g(0)+g(h)) - \frac{h^2}{12}\left(g'(0)-g'(h)\right).$$

2. Pour tout u de $[0\ ;\ a]$, on pose

$$\Psi(u) = \int_0^u g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{u}{2}(g(0)+g(u)) - \frac{u^2}{12}\left(g'(0)-g'(u)\right).$$

   Montrer que l'application Ψ ainsi définie est dérivable au moins jusqu'à l'ordre 3 sur $[0\ ;\ a]$, que

$$\Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi''(0) = 0$$

   et que $(\forall u \in [0\ ;\ a])$, $\left(\Psi^{(3)}(u) = \dfrac{u^2}{12}g^{(4)}(u)\right)$.

3. On pose $\mathrm{M} = \sup_{t\in[0\,;a]} \left|g^{(4)}(t)\right|$.
Montrer successivement que

$$\forall x \in [0\,;\,a],\quad \left|\Psi''(x)\right| \leqslant \mathrm{M}\frac{x^3}{36},$$
$$\forall y \in [0\,;\,a],\quad \left|\Psi'(y)\right| \leqslant \mathrm{M}\frac{y^4}{144},$$
$$\forall z \in [0\,;\,a],\quad |\Psi(z)| \leqslant \mathrm{M}\frac{z^5}{720}.$$

4. Montrer en utilisant les questions précédentes que

$$\int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}(g(0)+g(a)) + \frac{a^2}{12}(g'(0)-g'(a)) + \mathbb{R},$$

avec $\mathbb{R} \leqslant \dfrac{a^5}{720}\mathrm{M}$.

NANTES Série C I. -
Une urne contient neuf jetons numérotés de 1 à 9, indiscernables au toucher.
10 On tire simultanément deux jetons de l'urne et on note leurs numéros : a et b. On suppose qu'il y a équiprobabilité de sortie pour chaque jeton. On considère la variable aléatoire X associant à chaque paire de jetons tirés, a, b, le plus grand commun diviseur de a et de b. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X. Déterminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition. On représentera graphiquement celle-ci dans le plan -> -> rapporté à un repère orthonormé (0; j, j). e) Déduire de la question précédente les probabilités des événements suivants : A : « l'équation (x, y) E 7L2 et ax + by = 1 admet des solutions », B : « l'équation (x, y) E 7L2 et ax + by = 2 admet des solutions », C : « l'équation (x, y) E 7L2 et ax + by = 12 admet des solutions ». 20 On effectue maintenant l'épreuve suivante : on tire une paire de jetons, on note a et b, on remet les jetons dans l'urne, on effectue un nouveau tirage, et ainsi de suite. a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois 1 pour plus grand commun diviseur de a et de b au cours de quatre tirages successifs ? b) Combien faut-il effectuer de tirages pour que la probabilité d'avoir au moins une fois 1 pour plus grand commun diviseur de a et de b au cours de n tirages successifs soit supérieure à 0,999 ? n. - Soit E3 l'espace affine euclidien orienté, rapporté au , -+-+-+ repere orthonormé direct (0; j, j, k).