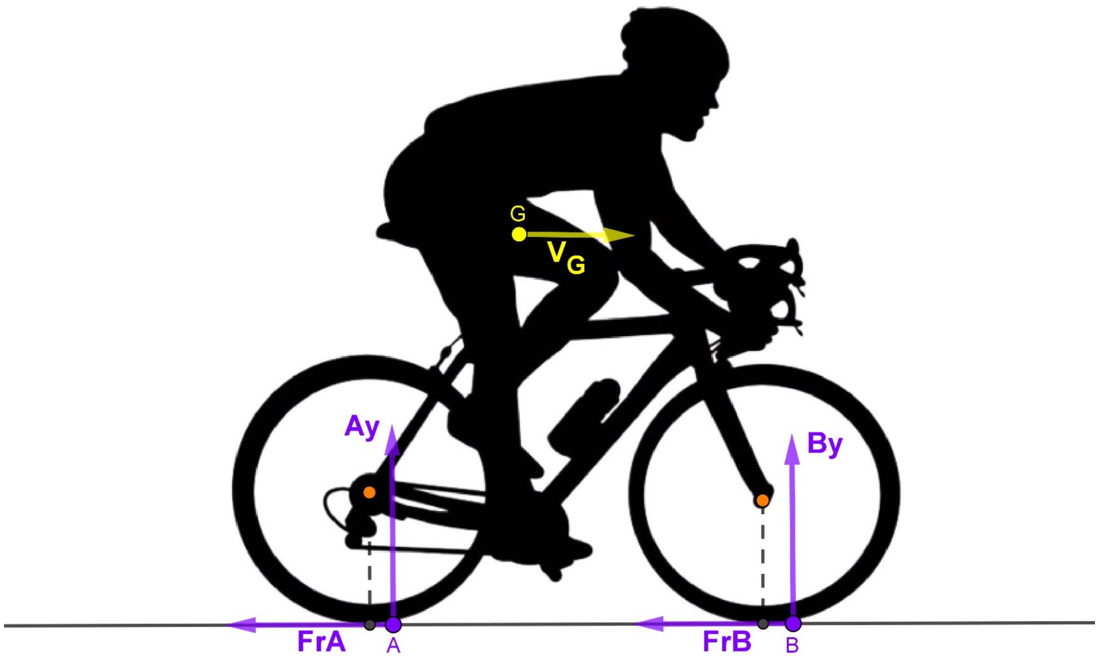
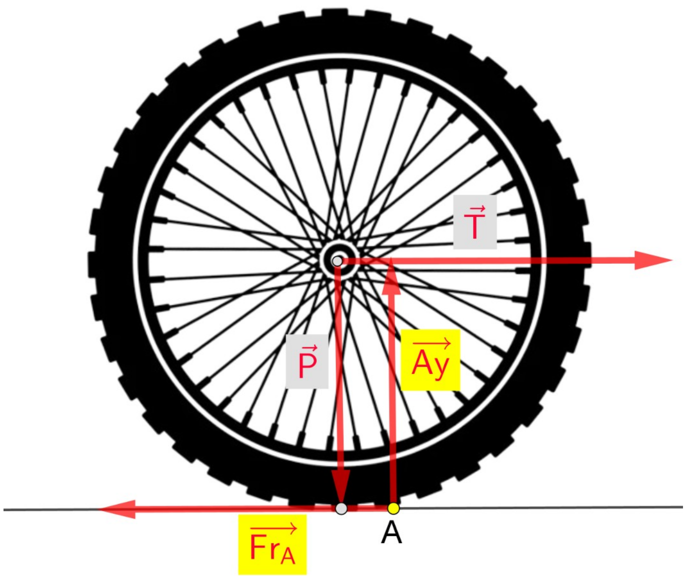


Figure 1: Bilan des forces mécaniques

1. En considérant le système cycliste + vélo et en appliquant le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe des X et l'axe des Y :

$$\begin{cases} M\dfrac{dv}{dt} = -kv - Fr_a - Fr_b \\ A_y + B_y = Mg \end{cases}$$

2.a/ On considère le système « roue arrière » dont les bilans des forces est indiqué sur la figure 2 :



T représente la traction exercée sur la roue et P le poids qui s'applique sur son centre de masse.

Application du théorème du moment cinétique par rapport au centre de la roue :

$$I_r \frac{dw}{dt} = Fr_a \times r - A_y \times a$$

2.b/ On considère le système « roue avant » :

$$I_r \frac{dw}{dt} = Fr_b \times r - B_y \times a$$

2.c/

$$\begin{cases} I_r \dfrac{dw}{dt} = Fr_a \times r - A_y \times a \\ I_r \dfrac{dw}{dt} = Fr_b \times r - B_y \times a \end{cases}$$

soit :

$$2 I_r \frac{dw}{dt} = (Fr_a + Fr_b) r - (A_y + B_y) a$$

Sachant que $I_r = mr^2$ et en utilisant les résultats obtenus en 1/ :

$$2mr^2 \frac{dw}{dt} = \left(-M\frac{dv}{dt} - kv\right) r - aMg$$

or $\frac{dv}{dt} = r\frac{dw}{dt}$ $\mu = \frac{a}{r}$

donc :

$$(M+2m)\frac{dv}{dt} + kv + \mu Mg = 0.$$

3. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1 d'équation caractéristique :

$$(M+2m)\frac{dv}{dt} + kv = 0$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{-k}{2m+M}dt$$

cette équation admet une solution de la forme :

$$v = Ae^{-\frac{k}{2m+M}t}$$

De plus, une solution particulière de l'équation différentielle est : $v = -\frac{\mu Mg}{k}$

La solution v de cette équation peut donc s'écrire :

$$v(t) = Ae^{-\frac{k}{2m+M}t} - \frac{\mu Mg}{k}$$

A t=0 $v = v_0$ donc :

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{\mu Mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{2m+M}t} - \frac{\mu Mg}{k}.$$

a/ Le cycliste s'arrête lorsque v(T)=0, soit :

$$\left(v_0 + \frac{\mu Mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{2m+M}T} - \frac{\mu Mg}{k} = 0$$

$$e^{-\frac{k}{2m+M}T} = \frac{\mu Mg}{kv_0 + \mu Mg}$$

il en résulte que :

$$T=\left(\frac{2m+M}{k}\right)\times\ln\left(1+\frac{kv_0}{\mu Mg}\right).$$

b/ Si on néglige les frottements de l'air, il faut déterminer $\lim_{k\to 0} T(k)$:

$$T=(2m+M)\times\frac{\ln\left(1+\frac{kv_0}{\mu Mg}\right)}{\frac{kv_0}{\mu Mg}}\times\frac{v_0}{\mu Mg}$$

$$\lim_{k\to 0} T(k)=(2m+M)\times\frac{v_0}{\mu Mg}$$