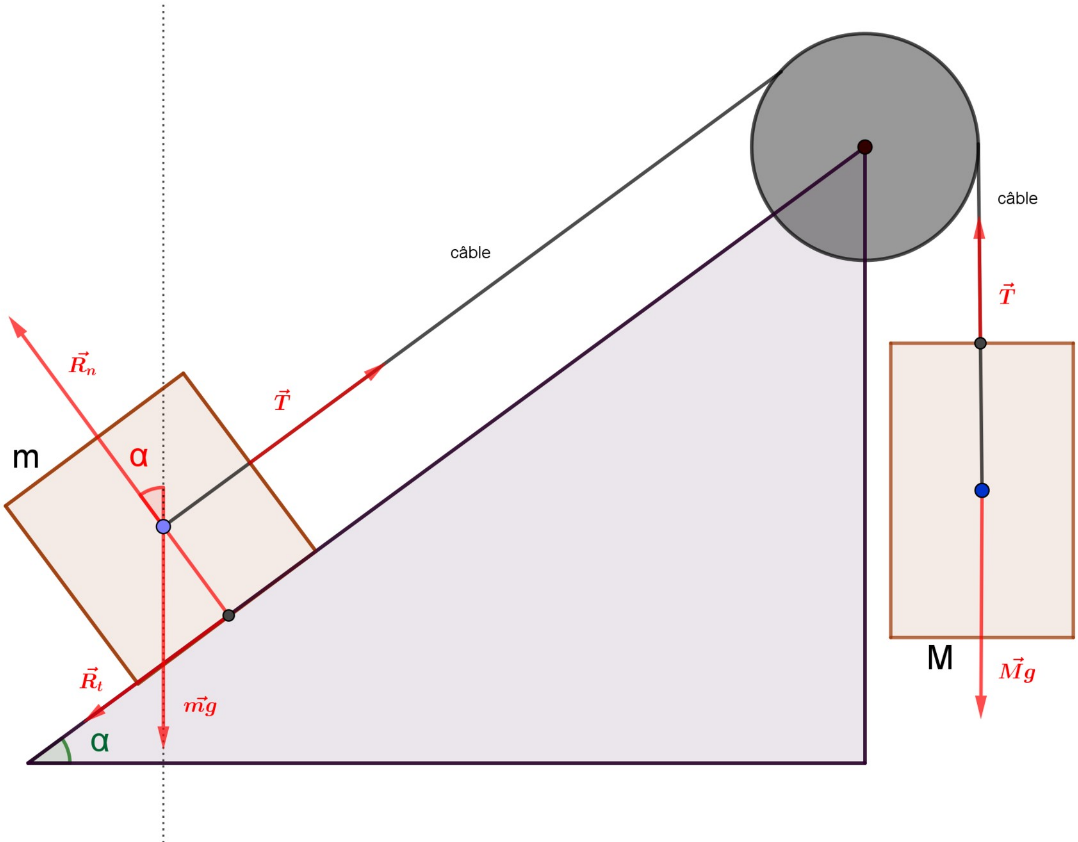

Figure 1: Bilan des forces

PARTIE 1

1.

Le système {masse m + câble} en équilibre vérifie le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} R_t + mgsin(\alpha) = T \\ mgcos(\alpha) = R_n \end{cases}$$

Le système {masse M + câble} en équilibre vérifie l'équation suivante :

$$Mg = T$$

il en résulte que :

$$\begin{cases} R_t = Mg - mgsin(\alpha) \\ R_n = mgcos(\alpha) \end{cases}$$

Il y a adhérence si $R_t \leq \mu_s \times R_n$ donc si

$$Mg - mgsin(\alpha) \leq mgcos(\alpha) \times \mu_s$$

$\frac{M}{m} \leq \sin(\alpha)+\mu_s \cos(\alpha)$.

2.

Il s’agit de résoudre l’inéquation :

$\sin(\alpha)+\mu_s \cos(\alpha) \geq \frac{M}{m}$

posons x=sin(α) :

$x+\mu_s \sqrt{1-x^2} \geq \frac{M}{m}$ soit : $\mu_s^2(1-x^2) \geq \left(\frac{M}{m}-x\right)^2$

$x^2(1+\mu_s^2)-\frac{2M}{m}x+(\frac{M}{m})^2-\mu_s^2 \leq 0.$

Le discriminant $\Delta=(\frac{2M}{m})^2-4(1+\mu_s^2)((\frac{M}{m})^2-\mu_s^2)$

$\Delta=4\mu_s^{\,2}(1+\mu_s^2-(\frac{M}{m})^2)$ = 0.26511875 avec m=2 kg, M=2,25 kg et $\mu_s=0{,}65$.

L’équation admet donc 2 racines :

$x_1=0.97184423 \quad donc \quad \alpha_1=76{,}37°$.

$x_2=0.6098780899 \quad donc \quad \alpha_2=37{,}58°$

donc la condition d’adhérence sur α est : $37{,}58° \leq \alpha \leq 76{,}37°$

PARTIE 2

1. Le principe fondamental de la dynamique aux systèmes {masse m + câble} et {masse M + câble}permet d’écrire :

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt} = -R_t-mgsin(\alpha)+T \\ M\frac{dv}{dt} = Mg-T \end{cases}$$

et en projection sur l’axe perpendiculaire au plan incliné : $R_n=mgcos(\alpha)$.

or $R_t = \mu_d R_n$ soit :

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -\mu_d mgcos(\alpha) - mgsin(\alpha) + T \\ M\dfrac{dv}{dt} = Mg - T \end{cases}$$

$$(M+m)\frac{dv}{dt} = Mg - mgsin(\alpha) - \mu_d mgcos(\alpha)$$

$$\frac{dv}{dt} = g\left(\frac{M}{M+m} - \frac{m}{M+m}(\sin(\alpha) + \mu_d\cos(\alpha))\right)$$

avec M=2m et $\mu_d = 0,5$:

$$a = g\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\cos(\alpha))\right).$$

2.

La tension du câble se déduit des équations précédentes :

$T = M(g-a)$ donc : $T = \dfrac{Mg}{3}(1 + \sin(\alpha) + \dfrac{1}{2}\cos(\alpha))$.

3.

$$v(t) = \int_0^t a\,dt = gt\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\cos(\alpha))\right).$$

4.

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = \frac{1}{2}gt^2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\cos(\alpha))\right).$$

PARTIE 3

Le système défini en partie 2 sert à tirer la masse m, et l'on s'intéresse au déplacement de la masse m sur une distance H.

1. L'énergie fournie au système vaut :

   $W_{fournie} = MgH.$

2. L'énergie perdue par le système est liée aux frottements :

   $W_{perdue} = R_t \times H = \mu_d \, mgHcos(\alpha).$

3. Le rendement η du système :

   $$\eta = \frac{W_{restituée} - W_{perdue}}{W_{fournie}}$$

   L'énergie utile sert à la traction de la masse M via la tension du câble :

   $$W_{restituée} = \int_0^H T\,dx = \frac{MgH}{3}\left(1+\sin(\alpha)+\frac{1}{2}\cos(\alpha)\right)$$

   $$\eta = \frac{\frac{MgH}{3}\left(1+\sin(\alpha)+\frac{1}{2}\cos(\alpha)\right) - \mu_d \, mgHcos(\alpha)}{MgH}$$

   avec M=2m et $\mu_d = 0{,}5$:

   $$\eta = \frac{1}{3}\left(1+\sin(\alpha)+\frac{1}{2}\cos(\alpha)\right) - \frac{1}{4}\cos(\alpha)$$

   $$\eta = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sin(\alpha) - \frac{1}{12}\cos(\alpha).$$

4. On montre que η(α) est une fonction croissante. En pratique α < 90° donc :

   $$\eta_{max} < \frac{2}{3} = 66{,}7\,\%.$$