Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1982 Paris Créteil et Versailles

EXERCICE 1 **4 points**

Pour chaque couple $(a,\ q)$ d'entiers naturels tels que $1 \leqslant q \leqslant a$ on note b_q le quotient dans la division euclidienne de a par q.
On appelle S_q l'ensemble des entiers naturels non nuls b tels que s soit le quotient dans la division euclidienne de a par b.

1. On suppose dans cette question que $a = 1982$.
   a. Déterminer b_1 ; b_8 ; b_9 ; b_{1982}.
   b. Soit b un entier naturel non nul. Démontrer que $b \leqslant b_8$ si, et seulement si, $8b \leqslant 1982$, démontrer que $b > b_9$ si, et seulement si, $9b > 1982$.
   c. En déduire que $S_8 = \{b \in \mathbb{N}\ ;\ b_9 < b \leqslant b_8\}$. Déterminer le cardinal de S_8.
2. On suppose que a est quelconque et que $1 \leqslant q < a$.
   a. Démontrer que $S_q = \{b \in \mathbb{N}\ ;\ b_{q+1} < b \leqslant b_q\}$.
   b. Démontrer que $\forall a \geqslant 1$

$$\sum_{q=1}^{a} \text{Card.}\left(S_q\right) = a$$

   où $\text{Card}\left(S_q\right)$ désigne le cardinal de S_q.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension trois, muni d'une base orthonormée $\left(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$ et $\mathscr{E}$ un espace affine associé muni du repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$.
On donne l'application f_α de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui au point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point $f_\alpha(M) = M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ définies par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -z+\alpha \\ y' & = & -x \\ z' & = & y-2 \end{array}\right.$$

Où α est un réel donné,

1. Montrer que f_α est un déplacement que l'on caractérisera.
2. Pour quelle valeur de α ce déplacement f_α est-il une rotation ?
   Préciser dans ce cas l'axe de rotation.
3. On suppose dans cette question que $\alpha = 1$.
   Montrer que f_1 est un vissage dont on précisera l'axe.

PROBLÈME **12 points**

Pour chaque entier k strictement positif, on définit une application f_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe $f_k(x) = \dfrac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$.
On appelle f_0 l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe $f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. **a.** Démontrer que pour chaque $k \geqslant 1$, la fonction f_k est croissante sur $\mathbb{R}_+$; en déduire, suivant la parité de l'entier k, le sens de variation des fonctions f_k.

   b. Étudier, en discutant suivant les valeurs de $k \geqslant 1$, les limites de $f_k(x)$ et de $\dfrac{f_k(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

   Que peut-on en déduire pour les branches infinies des courbes représentatives $\mathcal{C}_k$ des fonctions f_k ?

   c. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par deux points fixes; construire sur une même figure et dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.

   On précisera, s'il y a lieu, les asymptotes. (On prendra 2 cm pour unité.)-

2. Soit $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$I_k = \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \text{Log}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (Log désigne la fonction logarithme népérien).

   En déduire la valeur de I_0.

   b. Calculer I_1.

   c. Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a la relation

$$k.I_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}.$$

   En déduire I_2 et I_3.

   d. Démontrer que $I_k \leqslant \dfrac{1}{k+1}$ et en déduire la limite de la suite I_k quand k tend vers $+\infty$.

3. Soit u_0 un nombre réel tel que $0 < u_0 < 1$; on définit par récurrence une suite infinie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\text{pour } k > 0 \text{ fixé } u_1 = f_k\left(u_0\right), \quad u_n = f_k\left(u_{n-1}\right) \text{ pour } n \geqslant 1.$$

   a. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   b. On suppose que $k \geqslant 2$.

   Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n < \dfrac{u_{n-1}}{\sqrt{2}}$.

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite (que l'on précisera) quand n tend vers $+\infty$.

4. Pour chaque entier k strictement positif on définit une application g_k de $[0~;~1]$ dans $\left[0~;~\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ par $g_k(x) = f_k(x)$.

   a. Démontrer que pour chaque entier $k \geqslant 1$, la fonction g_k admet une fonction réciproque g_k^{-1}.

   b. Construire sur la figure précédente les courbes représentatives des fonctions g_k^{-1} pour $k = 1, 2, 3$.

   c. Donner l'expression des fonctions g_1^{-1} et g_2^{-1}.