

Algèbre Linéaire – MPI - correction

1. Donner la forme générale des matrices A antisymétriques d'ordre 2 (non nulles) dans E en fonction de a coefficient de la matrice dans $\mathbb{C}$.

Les coefficients diagonaux sont forcément nuls, on a donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les éléments propres de A .

Le polynôme caractéristique de A s'écrit : $\begin{vmatrix} x & -a \\ a & x \end{vmatrix} = x^2 + a^2 = (x+ia)(x-ia)$. Soit 2 valeurs propres dans $\mathbb{C}$: $\lambda_1 = ia$, $\lambda_2 = -ia$. Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

Déterminons les vecteurs propres :

$$AX_1 = \lambda_1 X_1 \text{ avec } X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ donne } y_1 = ix_1 \text{ donc } X_1 = \text{Vect}(1, i)$$

$$AX_2 = \lambda_2 X_2 \text{ avec } X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ donne } y_2 = -ix_2 \text{ donc } X_2 = \text{Vect}(1, -i)$$

3. Calculer A^n : on distinguera le cas pair et impair.

La matrice de passage dans la base des vecteurs propres vaut :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \text{ avec } \Delta = \begin{pmatrix} ia & 0 \\ 0 & -ia \end{pmatrix} \text{ la matrice diagonale dans la base des vecteurs propres.}$$

$$\Delta = P^{-1}AP \text{ donc } A = P\Delta P^{-1} \text{ et } A^n = P\Delta^n P^{-1}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (ia)^n & 0 \\ 0 & (-ia)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(ia)^n}{2} + \frac{(-ia)^n}{2} & -i\frac{(ia)^n}{2} + i\frac{(-ia)^n}{2} \\ i\frac{(ia)^n}{2} - i\frac{(-ia)^n}{2} & \frac{(ia)^n}{2} + \frac{(-ia)^n}{2} \end{pmatrix}$$

Algèbre Linéaire – MPI - correction

$$A^n = \frac{a^n}{2} \begin{pmatrix} (i)^n(1+(-1)^n) & (i)^{n+1}(-1+(-1)^n) \\ (i)^{n+1}(1-(-1)^n) & (i)^n(1+(-1)^n) \end{pmatrix}$$

$$\text{si } n=2k : A^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k a^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k a^{2k} \end{pmatrix} \text{ et si } n=2k+1 : A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k a^{2k+1} \\ -(-1)^k a^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

4. **Quelles sont les matrices A pour lesquelles il existe p entier tel que $A^p = I_2$? On précisera les valeurs de p correspondantes.**

Une condition nécessaire est la parité de $p=2k$ avec k entier non nul. $A^{2k} = I_2$ si :

$$(-1)^k a^{2k} = 1 \text{ soit } a^{2k} = (-1)^k \text{ soit : } a^{2k} = e^{ik\pi} \text{ donc } a = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

$$\text{En conclusion : } A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$