1/ Démontrer que : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}=\frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}\times\left(\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\dfrac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}\right)$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

2/ En déduire que : $\arctan(a)-\arctan(b) = \arctan\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$ avec $ab\neq-1$

Pour $a \; et \; b \in [0,\dfrac{\pi}{2}[$:

$$\tan(\arctan(a)-\arctan(b))=\frac{a-b}{1+ab} \quad donc \quad \arctan(a)-\arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$

3/ Calculer : $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)$

$$\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{k+1-k}{1+k(k+1)}\right)=\sum_{k=0}^{n} (\arctan(k+1)-\arctan(k))=\arctan(n+1)-\arctan(0)$$

$$\arctan(0)=0 \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \arctan(n+1)=\frac{\pi}{2}$$

donc :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \frac{\pi}{2}$$