

Correction BAC Maroc 2025 – Exercice 3

1. p premier impair et a premier avec p donc d'après le théorème de Fermat :

$$a^{p-1} \equiv 1[p] \text{ avec } p=2n+1 \text{ soit :}$$

$$a^{2n} \equiv 1[p] \text{ donc } a^{2n} - 1 \equiv 0[p] \text{ donc } (a^n - 1)(a^n + 1) \equiv 0[p]$$

Soient m et m' tels que :

$$\begin{aligned} (a^n - 1) &\equiv m[p] \text{ alors } mm' \equiv 0[p] \\ (a^n + 1) &\equiv m'[p] \end{aligned}$$

il en résulte que p/mm' donc p/m ou p/m' car p est premier

$$\text{si } p/m \text{ alors : } (a^n - 1) \equiv 0[p] \text{ soit } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p].$$

$$\text{si } p/m' \text{ alors : } (a^n + 1) \equiv 0[p] \text{ soit } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p].$$

2. a/ $ax^2 \equiv 1[p]$ donc $(ax_0)x_0 - kp = 1$ d'après Bezout x_0 et p sont premiers entre eux.
donc d'après Fermat : $x_0^{p-1} \equiv 1[p]$.

$$\begin{aligned} \text{b/ } p-1=2n \text{ donc : } (x_0^2)^n &\equiv 1[p] \text{ soit } (ax_0^2)^n \equiv a^n[p] \\ \text{or : } ax_0^2 &\equiv 1[p] \text{ donc } a^n \equiv 1[p] \text{ soit } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]. \end{aligned}$$

3. a/ si $p/(2^{2n+1}-1)$ alors $2^{2n+1} \equiv 1[p]$ soit $2 \times (2^n)^2 \equiv 1[p]$.

$$2 \text{ et } p \text{ sont premiers entre eux car } p \text{ est impair donc d'après 2b/ : } 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p].$$

$$\text{b/ } 11x + (2^{2n+1}-1)y = 1 \text{ et } (x, y) \in \mathbb{Z}^2$$

Notons que pour $n < 2$ il existe des solutions évidentes (1,-10) et (2,-3).

pour $n \geq 2$:

Supposons qu'il n'existe aucune solution alors d'après Bézout 11 et $(2^{2n+1}-1)$ ne sont pas

premiers entre eux. Comme 11 est premier alors $11/(2^{2n+1}-1)$ or d'après 3a/ : $2^{\frac{11-1}{2}} \equiv 1[11]$

ce qui est impossible donc il existe au moins une solution à l'équation dans $\mathbb{Z}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Correction BAC Maroc 2025 – Exercice 3

4. (F) : $x^2 + 5x + 2 \equiv 0[11]$

4a/

$$8(x^2 + 5x + 2) \equiv 0[11]$$

$$2(2x + 5)^2 + 16 - 50 \equiv 0[11]$$

$$2(2x + 5)^2 \equiv 1[11]$$

Inversement :

$$2(2x + 5)^2 \equiv 1[11]$$

$$8x^2 + 40x + 50 \equiv 1[11] \text{ et } 50 \equiv 6[11]$$

$$8(x^2 + 5x) + 6 \equiv 1[11]$$

$$24(x^2 + 5x) + 18 \equiv 3[11] \text{ et } 24 \equiv 2[11] \text{ et } 18 \equiv 7[11]$$

$$2(x^2 + 5x) + 7 \equiv 3[11]$$

$$12(x^2 + 5x) + 42 \equiv 7[11] \text{ et } 40 \equiv 7[11]$$

$$x^2 + 5x + 2 \equiv 0[11]$$

4b/ 2 et 11 sont premiers entre eux donc d'après 2b/ si l'équation a une solution alors on a :

$$2^{\frac{11-1}{2}} = 2^5 \equiv 1[11] \text{ ce qui est impossible.}$$

Il en résulte que l'équation (F) n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}$.