Partie I

Equation dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ (E) : $47x-43y=1$

1.

$47\times11-12\times43=1$

2.

$\begin{cases}47x-43y=1\\47\times11-12\times43=1\end{cases}$ donc $47(x-11)=43(y-12)$ (1)

43 et 47 sont premiers entre eux et $43/47\times(x-11)$ donc d'après Gauss :

$43/(x-11)$ soit : $x-11=43k$

de même 47/(y-12) : y-12 = 47k' et en appliquant (1) on a k=k'.

donc :

$\begin{cases}x=43k+11\\y=47k+12\end{cases}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Partie II

On considère l'équation (F) dans $\mathbb{Z}$: $x^{41}\equiv4[43]$

1

a/

43 est un nombre premier donc si 43 et x ne sont pas premier entre eux alors 43 divise x donc :

$x\equiv0[43]$ donc $x^{41}\equiv0\,mod[43]$ impossible donc x et 43 sont premiers entre eux.

43 est premier et x et 43 sont premiers entre eux donc d'après le petit théorème de Fermat :

$x^{43-1}\equiv1[43]$ donc $x^{42}\equiv1[43]$.

b/

$x^{41} \equiv 4[43]$ donc $x^{42} \equiv 4x[43]$ or d'après 1a/ : $x^{42} \equiv 1[43]$ il en résulte que :

$4x \equiv 1[43]$.

Soit $44x \equiv 11[43]$ or $44x \equiv x[43]$ donc $x \equiv 11[43]$.

2

Si x est solution de (F) alors d'après 1/ $x \equiv 11[43]$.

Inversement si $x \equiv 11[43]$ alors :

$$\begin{array}{l} 11^2 \equiv 35\, mod[43] \\ (11^2)^{10} \equiv 35^{10} mod[43] \\ 11^{20} \equiv 4\, mod[43] \end{array} \text{ donc } \begin{cases} (11^{20})^2 \equiv 16\, mod[43] \\ 11 \equiv 11[43] \end{cases} \text{ donc } 11^{41} \equiv 16 \times 11[43] = 4[43]$$

or $x^{41} \equiv 11^{41}[43]$ donc $x^{41} \equiv 4[43]$ et x est solution de (F).

Il en résulte que l'ensemble des solutions de (F) est l'ensemble des $\{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 11[43]\}$.

PARTIE III

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S) à 2 équations suivant :

$$\begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{47} \equiv 10[47] \end{cases}$$

1/

a/

47 premier donc d'après le petit théorème de Fermat : $x^{47} \equiv x[47]$ or $x^{47} \equiv 10[47]$ donc $x \equiv 10[47]$.

$x^{41} \equiv 4[43]$ donc d'après la partie II $x \equiv 11[43]$.

Soit (S') :

$$\begin{cases} x \equiv 11[43] \\ x \equiv 10[47] \end{cases}$$

b/

De (S') on déduit :

$\begin{cases} x=43b+11 \\ x=47a+10 \end{cases}$ donc 47a -43b=1. D'après partie I on a : $\begin{cases} a=43k+11 \\ b=47k+12 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2021k+527 \\ x=2021k+527 \end{cases}$ soit $x\equiv 527[2021]$.

2/

Si x est solution de (S) alors d'après 1b/ $x\equiv 527[2021]$.

Inversement si $x\equiv 527[2021]$:

$\begin{cases} x=43\,x\,47k+47\,x\,11+10 \\ x=47\,x\,43k+43\,x\,12+11 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=47(43k+11)+10 \\ x=43(47k+12)+11 \end{cases}$

soit :

$\begin{cases} x\equiv 11[43](1) \\ x\equiv 10[47](2) \end{cases}$

D'après II-2 , (1) entraîne $x^{41}\equiv 4[43]$.

$\begin{matrix} 10\equiv 10[47] \\ 10^{10}\equiv 21[47] \\ (10^{10})^4\equiv 42[47] \end{matrix}$ et $\begin{cases} 10^7\equiv 45[47] \\ 10^{40}\equiv 42[47] \end{cases}$ donc $10^{47}\equiv 10[47]$ et (2) donne : $x^{47}\equiv 10[47]$

donc si $x\equiv 527[2021]$ alors x est solution de (S).

Conclusion : l'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble des $\{x\in\mathbb{Z}/x\equiv 527[2021]\}$