On considère le polynôme $P(x)=x^3+bx^2+cx+1$ avec b et c réels non nuls. P admet 3 racines réelles x_1, x_2, x_3.

1/ En appliquant les formules de Viète sur les coefficients du polynôme :

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-b \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=c \\ x_1x_2x_3=-1 \end{cases}$$

$(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2c$ soit $x_1^2+x_2^2+x_3^2=b^2-2c$.

2/ En notant que 0 n'est pas une racine de P, il en résulte que :

x_1^2, x_2^2, x_3^2, *sont des réels strictement positifs, on peut donc appliquer l'inégalité* $AM-GM$:

$\frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{3} \geq \sqrt[3]{x_1^2x_2^2x_3^2}$ donc $\frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{3} \geq 1$

donc : $b^2-2c \geq 3$.

L'égalité se produit lorsque $x_1 = x_2 = x_3$.

3/ On prend b=c.

3a/

$P(x)=(x+1)(x^2+(b-1)x+1)$.

$x^2+(b-1)x+1=0$ *admet des racines réelles si* :

$\Delta=(b-1)^2-4=(b+1)(b-3)\geq 0$ soit $b\in I=]-\infty;-1]\cup[3;\infty[$

la condition en 2/ donne : $b^2-2b-3\geq 0$ soit $(b+1)(b-3)\geq 0$.

La condition est donc nécessaire et suffisante lorsque b=c.

3b/ Déterminer les 3 racines réelles de P en fonction de b.

D'après 3a/ :

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\frac{(1-b)+\sqrt{(b+1)(b-3)}}{2} \\ x_3=\frac{(1-b)-\sqrt{(b+1)(b-3)}}{2} \end{cases}$$

3c/ On note x_2 et x_3 les 2 racines non entières avec $x_2>x_3$.

3c-1/

Les racines x_2,x_3 vérifient l'équation : $x^2+(b-1)x+1=0$

donc $x_2 \times x_3=\frac{1}{1}=1$

3c-2/

$\lim_{b\to\infty} x_3(b)=-\infty$ or $x_2=\frac{1}{x_3}$ donc $\lim_{b\to\infty} x_2(b)=0$.