Partie 1 - Calculs mathématiques

1 On cherche à calculer $I = \int_0^v \frac{\mathrm{du}}{b - au^2}$ avec a et b >0.

1.1 Etablir que : $\frac{1}{1-x^2} = \frac{e}{1-x} + \frac{f}{1+x}$, en déterminant e et f.

1.2 Calculer : $J = \int_0^v \frac{\mathrm{dx}}{1-x^2}$

1.3 En déduire que I = $\frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{a}{b}}v}}{\sqrt{1-\sqrt{\frac{a}{b}}v}}$

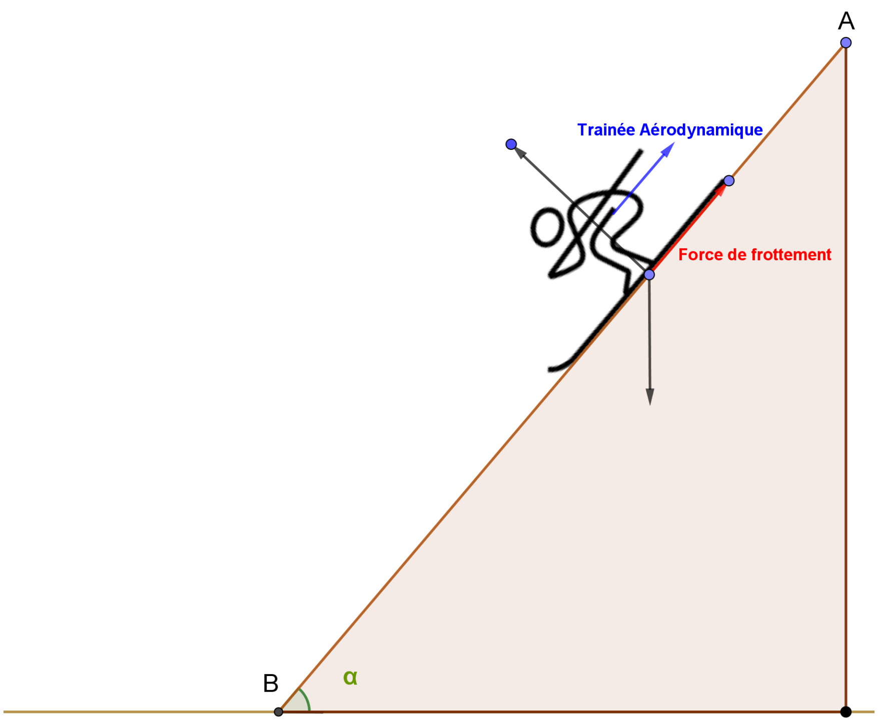
2 Montrer que : $\int_0^v \frac{\mathrm{du}}{1+(au)^2} = \frac{1}{a} \,\mathrm{arctan(av)}$

On admet que : $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

Partie 2 - Skieur en descente

A l'instant t=0, un skieur de masse m descend depuis le point A, une pente d' inclinaison α en étant soumis aux forces suivantes :

1. la force de trainée aérodynamique $F_t = kv^2$ proportionnelle à la vitesse au carré v. Le skieur gardant la même position au cours de la descente, la valeur de k est considérée constante.
2. La force normale R perpendiculaire au mouvement.
3. Le poids du skieur.
4. La force de frottement des skis sur la neige $F_f = \mu R$ ou R est la force normale et μ le coefficient de frottement dynamique des skis sur la neige.



1 Expression de la vitesse v en fonction du temps t :

1.1 Etablir l'équation différentielle de la vitesse v du skieur.
1.2 En posant b=(sinα -μcosα)g et a=$\frac{k}{m}$, Montrer que v(t) peut s'écrire :

$$V(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{\exp^{2\sqrt{ab}t} - 1}{\exp^{2\sqrt{ab}t} + 1}\right)$$

2 Montrer que si la pente avait une longueur infinie, v tendrait vers une vitesse constante v_l que l'on déterminera .

2.1 On donne : α=30°, m=75kg, g=9,81 m/s², k=0,138 kg/m, μ=0,02.
2.2 Caculer V_l.
2.3 Au bout de combien de temps, le skieur atteindra la moitié de V_l ?

Partie 3 - Calcul de la vitesse en B

On s'intéresse au mouvement du skieur sur la pente entre les points A et B. x(t) représente le déplacement du skieur sur la pente, A représentant le point d'origine x(0)=0.

1 Exprimer x(t) en fonction de a,b, et t.
2 Si l représente la longueur de la pente entre les points A et B. Montrer que T_B, la durée pour atteindre le point B, vérifie l'équation suivante :

$$\exp^{2\sqrt{ab}T_B} - 2\exp^{al}\exp^{\sqrt{ab}T_B} + 1 = 0$$

2.1 Exprimer T_B en fonction de a,l et b.
2.2 l=100m. En utilisant les valeurs numériques de la partie 2, calculer la valeur de T_B et la vitesse du skieur v_B en B.

Partie 4 - Distance d'arrêt sur piste plate

Le skieur arrive sur la piste plate à la vitesse v_B et se laisse glisser jusqu'au point C. T_C correspond au temps nécessaire pour parcourir la distance d'arrêt entre les points A et C. On pose $c = \sqrt{\frac{k}{\mu mg}}$.

1 Etablir l'équation différentielle de la vitesse v(t) du skieur.
2 Montrer que $T_c = \frac{1}{\mu gc} \arctan(cv_B)$.
3 On pose $\lambda = 1 + cv_B \tan(\mu g \mathrm{T_C})$. On cherche la distance D parcourue entre les points A et C.

3.1 Montrer que $\frac{\lambda - 1}{cv_B} = cv_B$.

3.2 Exprimer D en fonction de λ, c, v_B, µ, g puis montrer que :

$$D = \frac{1}{\mu gc^2} \ln \sqrt{1 + c^2 v_B^2}$$

3.3 Calculer la valeur numérique de D.