

EXERCICE3 : (3 points)

Soient p un nombre premier impair et a un entier premier avec p

- 0.5 1- Montrer que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$
- 2- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $ax^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Soit x_0 une solution de cette équation.
- 0.5 a) Montrer que : $x_0^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
- 0.25 b) En déduire que : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$
- 3- Soit n un entier naturel non nul.
- 0.5 a) Montrer que si p divise $2^{2n+1} - 1$ alors $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$
- 0.5 b) En déduire que l'équation $(E) : 11x + (2^{2n+1} - 1)y = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$
- 4- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F) : x^2 + 5x + 2 \equiv 0 \pmod{11}$
- 0.25 a) Montrer que : $(F) \Leftrightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 1 \pmod{11}$
- 0.5 b) En déduire que l'équation (F) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$