1 - Densité de probabilité

On considère la variable aléatoire X à densité de probabilité f définie telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3\pi}\cos^4(\dfrac{x}{2}) & si\ |x| \leq \pi \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1/ Linéariser $\cos^4(x)$.
1a/ Démontrer que f est bien une densité de probabilité.
1b/ Calculer $E(X)$.

2/ On rappelle que la variance est définie par :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(x - E(X))^2 dx$$

2a/ Calculer V(X).
2b/ En déduire l'écart type $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

2 - Intervalle de confiance d'une moyenne empirique

1/ On considère un échantillon de taille n $\{X_1, ... X_n\}$ de même loi que X.
On définit la moyenne empirique $\overline{Y_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$.
1a/ Calculer $\mu = E(\overline{Y_n})$.
1b/ Exprimer $\nu = V(\overline{Y_n})$ en fonction de σ et de n.

2/ On admet qu'en application du théorème centrale limite, la loi de $\overline{Y_n}$ lorsque n tend vers ∞, converge vers une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\nu)$.
Soit $Z_n = \frac{\overline{Y_n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

2a/ Que peut-t-on dire de la loi suivie par Z_n?
2b/ En déduire un intervalle de confiance de $\overline{Y_n}$ au seuil de 95% lorsque n est suffisamment grand (n>30).
2c/ On donne n=100, $\overline{Y_{100}}$=0,1 donner un intervalle de confiance de $\overline{Y_{100}}$ au seuil de 95%