On cherche les nombres n tels que la somme $S_n = 1+2+...n$ soit un carré parfait a^2.

a et n sont deux entiers non nuls qui vérifient la propriété ci-dessus.

Question préliminaire : Démontrer que si p nombre premier divise $b \times c$ alors soit p/b soit p/c.

PARTIE A

1/ Montrer que $n(n+1) = 2a^{2.}$.

2/ Etablir que $\frac{n}{\sqrt{2}} < a < \frac{n+1}{\sqrt{2}}$.

3/ Ecrire un algorithme qui permet de calculer toutes les valeurs de n et de a pour n inférieur à 1000000. On notera $Ceil\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)$le plus petit entier supérieur à $\frac{n}{\sqrt{2}}$ et $Floor\left(\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right)$ le plus grand entier inférieur à $\frac{n+1}{\sqrt{2}}$.

PARTIE B

1/ Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad si \quad k > 1 \quad alors \quad k \leq k^2 - 2$.

2/ Montrer que a ne peut pas être un nombre premier.

PARTIE C

Soit d=PGCD(n,a). On considère les entiers u et v tels que a=du et n=dv.

1/ Prouver que d divise v.

2/ n est impair : montrer que d^2=n.

3/ n est pair : montrer que $2d^2$=n. Montrer que n+1 est un carré parfait.

4/

4a/ En déduire une condition nécessaire sur n pour que S_n soit un carré parfait.

Cette condition est-t-elle suffisante ?

4b/ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. S_{p^2+1} peut-il être un carré parfait ?