Partie A

On considère la fonction $f_n(x)=\ln^{n-2}(x)-\ln^{n-1}(x)$ définie sur l'intervalle I= $[1,e]$ avec n entier et $n\geq 2$.

1. Montrer que f_n passe par un extremum sur I que l'on déterminera. On désigne par a_n l'abscisse de cet extremum.

$$f_n'(x)=\frac{1}{x}(n-2)\ln^{n-3}(x)-(n-1)\ln^{n-2}(x)\frac{1}{x}$$
$$=\ \ln^{n-3}(x)(\frac{1}{x})\big((n-2)-(n-1)\ln(x)\big).$$

$\forall x\in I\quad \ln^{n-3}(x)\geq 0$

$f'(x)\geq 0\quad si\quad n-2\geq(n-1)\ln(x)\quad soit\quad \ln(x)\leq\frac{n-2}{n-1}.$

Conclusion :

$x\leq e^{\frac{n-2}{n-1}}$ *alors* f_n *est croissante*.
$x\geq e^{\frac{n-2}{n-1}}$ *alors* f_n *est décroissante*.

il en résulte que f_n est maximum sur I quand $x=a_n=e^{\frac{n-2}{n-1}}$.

2. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n-1}=1\quad donc\quad \lim_{n\to\infty} a_n=e.$$

3. En déduire que : $\forall x\in I\quad f_n(x)\ \leq\ \frac{(n-2)^{n-2}}{(n-1)^{n-1}}$.

$$f_n(x)\leq f_n(a_n)=(\frac{n-2}{n-1})^{n-2}-(\frac{n-2}{n-1})^{n-1}=(\frac{n-2}{n-1})^{n-2}(1-\frac{n-2}{n-1})$$

donc $\forall x \in I \quad f_n(x) \leq \dfrac{(n-2)^{n-2}}{(n-1)^{n-1}}$.

Partie B

Soit la suite $I_n = \int_1^e \ln^n(x)\,dx$ avec n entier.

1 Calculer I_0 et I_1.

$I_0 = e-1$.

$I_1 = [xln(x)-x]_1^e = 1$.

2 Montrer que : $I_n \geq 0$.

$\forall x \in I \quad \ln^n(x) \geq 0 \quad donc \quad I_n \geq 0$.

3 Dans la suite du problème on considère que $n \geq 2$.

3.1 Etablir que $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_{n-1})$.

En intégrant par partie :

$f'(x) = \ln(x) \qquad f(x) = xln(x) - x$

$g(x) = \ln^{n-1}(x) \qquad g'(x) = (n-1)\ln^{n-2}(x)(\dfrac{1}{x})$

$I_n = \left[\ln^{n-1}(x)(xln(x)-x)\right]_1^e - (n-1)\int_1^e (\ln^{n-1}(x) - \ln^{n-2})\,dx$

$I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_{n-1})$.

3.2 En déduire le sens de variation de I_n.

$I_n \geq 0$ *donc* $I_{n-2} \geq I_{n-1}$. La suite I_n est donc décroissante.

4 Démontrer que $I_n \leq (e-1)\left(\dfrac{n-2}{n-1}\right)^{n-2}$.

D'après la partie A, on a :

$f_n(x) \leq \dfrac{(n-2)^{n-2}}{(n-1)^{n-1}}$ *soit* $I_n \leq (n-1) \times \int_1^e \dfrac{(n-2)^{n-2}}{(n-1)^{n-1}}\,dx$

d'où $I_n \leq (e-1)\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-2}$

5 En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

D'après 4/ $I_n \leq (e-1)\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-2}$

$\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-2} = \mathrm{e}^{(n-2)\times\ln(\frac{n-2}{n-1})}$

$\frac{n-2}{n-1} < 1$ *donc* $\ln(\frac{n-2}{n-1}) < 0$

donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-2} = 0$

or :

$0 \leq I_n \leq (e-1)\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-2}$

donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.