PROBLEME

On cherche à déterminer la limite quand n tend vers l'infini, de la suite I_n définie dans la partie B.

Partie A

On considère la fonction $f_n(x)=\ln^{n-2}(x)-\ln^{n-1}(x)$ définie sur l'intervalle I= $[1,e]$ avec n entier et $n\geq 2$.

1. Montrer que f_n passe par un extremum sur I que l'on déterminera. On désigne par a_n l'abscisse de cet extremum.
2. Calculer $\lim_{n\to\infty} a_n$.
3. En déduire que : $\forall x\in I \quad f_n(x) \leq \dfrac{(n-2)^{n-2}}{(n-1)^{n-1}}$

Partie B

Soit la suite $I_n=\int_1^e \ln^n(x)dx$ avec n entier.

1 Calculer I_0 et I_1.

2 Montrer que : $I_n\geq 0$.

3 Dans la suite du problème on considère que $n\geq 2$.

3.1 Etablir que $I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_{n-1})$.

3.2 En déduire le sens de variation de I_n.

4 Démontrer que $I_n\leq (e-1)\left(\dfrac{n-2}{n-1}\right)^{n-2}$

5 En déduire $\lim_{n\to\infty} I_n$.