Correction exercice 2 :

Soient les suites Un et Vn définies comme suit :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_1 = 31 \\ U_{n+2} = 12U_{n+1} - 35U_n \end{cases} \qquad \begin{cases} V_0 = -1 \\ V_1 = -11 \\ V_{n+2} = 12V_{n+1} - 35V_n \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $X_n = U_n + V_n$ et $Y_n = U_n - V_n$.

1.

$\begin{array}{l} X_0 = 4 \\ X_1 = 20 \end{array}$ *donc* $X_1 = 5X_0$.

Supposons $X_n = 5X_{n-1}$:

$X_{n+1} = U_{n+1} + V_{n+1} = 12U_n - 35U_{n-1} + 12V_n - 35V_{n-1} = 12(U_n + V_n) - 35(U_{n-1} + V_{n-1})$

$X_{n+1} = 12X_n - 35X_{n-1} = 12X_n - 7X_n = 5X_n$.

Par récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_{n+1} = 5X_n$.

Donc Xn est une suite géométrique de raison 5.

2.

$\begin{array}{l} Y_0 = U_0 - V_0 = 6 \\ Y_1 = U_1 - V_1 = 42 \end{array}$ *donc* $Y_1 = 7Y_0$.

Supposons $Y_n = 7Y_{n-1}$

$Y_{n+1} = U_{n+1} - V_{n+1} = 12U_n - 35U_{n-1} - 12V_n + 35V_{n-1} = 12(U_n - V_n) - 35(U_{n-1} - V_{n-1})$

$Y_{n+1} = 12Y_n - 35Y_{n-1} = 12Y_n - 5Y_n = 7Y_n$.

Par récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$ $Y_{n+1} = 7Y_n$.

Donc Yn est une suite géométrique de raison 7.

3.

$X_n = 5X_{n-1} = 5^n X_0 = 4x5^n$
$Y_n = 7Y_{n-1} = 7^n Y_0 = 6x7^n$

$\begin{cases} X_n = U_n + V_n \\ Y_n = U_n - V_n \end{cases}$ donc $\begin{matrix} U_n = \dfrac{X_n + Y_n}{2} \\ V_n = \dfrac{X_n - Y_n}{2} \end{matrix}$

$U_n = 2x5^n + 3x7^n$
$V_n = 2x5^n - 3x7^n$

4.

$d_{n=} \, pgcd(U_n, U_{n-1})$

$U_{n+1} - 5U_n = 2x5^{n+1} + 3x7^{n+1} - 2x5^{n+1} - 3x7^n x5 = 2x3x7^n$

$7U_n - U_{n+1} = 2x5^n x7 + 3x7^{n+1} - 2x5^{n+1} - 3x7^{n+1} = 2^2 x5^n$

or $d_n / U_n \, et \, d_n / U_{n+1} \, donc \; d_n / U_{n+1} - 5U_n = 3x7^n x2$

de même $d_n / 7U_n - U_{n+1} = 2^2 x5^n$

il en résulte que $d_n / pgcd(3x7^n x2, \; 2x5^n)$ donc $d_n/2$.

Il en résulte que d_n=1 ou 2.

- On suppose d_n=2 :
  - $\begin{matrix} U_n = 2a \\ U_{n+1} = 2b \end{matrix}$ avec pgcd (a,b)=1
  - donc $2a = 2x5^n + 3x7^n \; soit \; a = 5^n + \dfrac{3}{2}x7^n$
  - impossible car $a \in \mathbb{N}$

On en déduit que d_n=1 et que U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.