Correction exercice 1.

04/05/24

1.

Soit a et b deux entiers non nuls, premiers entre eux.

pgcd(a+b,a)=pgcd(a+b-a,a)=pgcd(b,a)=1.

pgcd(a+b,b)=pgcd(a+b-b,b)=pgcd(a,b)=1.

Il en résulte que a et b sont aussi premiers avec a+b.

Pour tout diviseur premier p de ab :

p/ab alors soit p/a ou p/b :

- si p/a alors p ne divise par a+b car a et a+b sont premiers entre eux.
- si p/b alors p ne divise par a+b car b et a+b sont premiers entre eux.

Donc il n’existe aucun diviseur premier commun à ab et a+b donc ab et a+b sont premiers entre eux.

2.

$$\begin{cases} x+y = 56 \\ ppcm(x,y) = 105 \end{cases}$$

pgcd(x,y) x ppcm(x,y)=xy. En notant d=pgcd(x,y), on a :

$$\begin{cases} x+y=56=2^8 x 7 \\ xy=105d=7x3x5xd \end{cases}$$

d’après 1/ si x et y étaient premiers entre eux alors 56 et 105d serait premiers entre eux, ce qui est impossible.

On sait que x et y sont solutions de l’équation $X^2-56X+105d=0$ et (x,y) sont des entiers donc

$\Delta=(56^2-4x105d)\geq 0$ donc d≤7. Sachant que d/ppcm(x,y)=105=7x3x5, il en résulte que :

d ∈ {3,5,7}. Seul la valeur d=7 permet d’avoir un discriminant qui est un carré parfait :

$\Delta=56^2-4x105x7=14^2 \; donc \; (x,y)=\frac{56\pm 14}{2}$ donc les solutions possibles sont (35,21) et (21,35).

On vérifie que les solutions trouvées satisfont au système d’équation.