PARTIE B

Un entier n est puissant si pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

1/ 8 est puissant car 2 est le seul diviseur premier de 8 et 4 divise 8.
9 est puissant car 3 est le seul diviseur premier de 9 et 9 divise 9.

2/ a et b deux entiers naturels.Soit $n=a^2b^3$. Soit p un diviseur premier de n. Posons k=ab.
p/n donc p/k^2b.
si p premier avec b:
d'après gauss alors p/k^2. Démontrons par l'absurde que si p/k^2 alors p/k :
supposons que p ne divise pas k alors comme p est premier alors p et k n'ont aucun diviseur premier en commun mais alors p et k^2 n'ont aussi aucun diviseur premier en commun. Comme p est premier alors p ne peut pas diviser k^2.
Donc p/k soit p/ab donc p^2/a^2b^2 donc p^2/n.
si p non premier avec b alors p / b car p est premier. si p/b alors p^2/b^2 donc p^2/n.
Il en résulte que $n=a^2b^3$ est un nombre puissant.

3/ (x,y) solution de (E) donc $x^2-1=8y^2$ soit $x^2-1=2^3y^2$. D'après 2/ x^2-1 est un nombre puissant.
Soit p diviseur premier de x^2, p/x comme démontré en 2/. Si p/x alors p^2/x^2 donc x^2 est un nombre puissant.

4/ D'après la partie A/ il existe une infinité de solutions de (E). Or pour tout couple (x,y) solution de E, on a établi en 3/ que x^2 et x^2-1 étaient des nombres consécutifs puissants. Il en résulte qu'il existe une infinité de nombres consécutifs puissants.
$x_1=3$ et $y_1=1$ donc $x_2=9+8=17$ et $y_2=3+3=6$.
$x_3=51+48=99$. $x_3^2-1=9800$ et 9801 sont 2 nombres puissants supérieurs à 2018.