

## PARTIE 1

On cherche à résoudre l'équation (1) :  $a^2+b^2=a^3$  avec a et b entiers non nuls.

1/ Montrer que pour tout entiers u et v,  $\text{PGCD}(u^2,v^2)=\text{PGCD}^2(u,v)$ .

2/ Prouver que  $u^2/v^2$  si et seulement si  $u/v$ .

3/ Montrer que a et b sont solution de (1) si et seulement si :

$$a=1+k^2.$$

$$b=k(1+k^2).$$

avec k entier  $\geq 1$ .

4/ Démontrer que si a est un multiple de 5 alors b est un multiple de 10.

5/ On suppose que a est un nombre premier.

a/ Montrer que k et  $1+k^2$  sont premiers entre eux.

b/  $b=8020$ . Trouver la valeur de a.

## PARTIE 2

On cherche à résoudre l'équation (2) :  $a^n+b^n=a^{n+1}$  avec a et b entiers non nuls.

1/ Montrer que a et b sont solution de (2) si et seulement si :

$$a=1+k^n.$$

$$b=k(1+k^n).$$

avec k entier  $\geq 1$ .

2/ n est impair et a est un nombre premier.

a/ Montrer que  $1+k^n=(1+k)(k^{n-1}-k^{n-2}+\dots-k^2-k+1)$ .

b/ En déduire que l'équation (2) admet une solution unique que l'on précisera.