

PARTIE 1

On cherche à résoudre l'équation (1) : $a^2 + b^2 = a^3$ avec a et b entiers non nuls.

1/ Montrer que pour tout entiers u et v , $\text{PGCD}(u^2, v^2) = \text{PGCD}^2(u, v)$.

2/ Prouver que u^2/v^2 si et seulement si u/v .

3/ Montrer que a et b sont solution de (1) si et seulement si :

$$a = 1 + k^2.$$

$$b = k(1 + k^2).$$

avec k entier ≥ 1 .

4/ Démontrer que si a est un multiple de 5 alors b est un multiple de 10.

5/ On suppose que a est un nombre premier.

a/ Montrer que k et $1 + k^2$ sont premiers entre eux.

b/ $b = 8020$. Trouver la valeur de a .

PARTIE 2

On cherche à résoudre l'équation (2) : $a^n + b^n = a^{n+1}$ avec a et b entiers non nuls.

1/ Montrer que a et b sont solution de (2) si et seulement si :

$$a = 1 + k^n.$$

$$b = k(1 + k^n).$$

avec k entier ≥ 1 .

2/ n est impair et a est un nombre premier.

a/ Montrer que $1 + k^n = (1 + k)(k^{n-1} - k^{n-2} + \dots + k^2 - k + 1)$.

b/ En déduire que l'équation (2) admet une solution unique que l'on précisera.