

Soit  $a$  un entier naturel non nul.

$a$  est un carré parfait si il existe un entier naturel  $n$  tel que  $a=n^2$ .

### **PARTIE 1**

1/  $p$  et  $q$  deux entiers naturels non nuls, montrer que si  $q^2/p^2$  alors  $q/p$ .

2/ Soit  $a$  et  $b$  deux entiers premiers entre eux. Montrer que  $a \times b$  est un carré parfait si et seulement si  $a$  et  $b$  sont 2 carrés parfaits.

### **PARTIE 2**

1/ Montrer que  $\sqrt{a}$  est rationnel si et seulement si  $a$  est un carré parfait.

2/ Que peut-t-on conclure sur l'irrationalité des nombres suivants ?

- $\sqrt{p}$  avec  $p$  nombre premier
- $\sqrt{1+a^2}$

3/ Montrer que  $\sqrt{4a+2}$  est un irrationnel.

### **PARTIE 3**

$$E=a^3+2a^2+2a+1$$

1/ Montrer que  $E$  peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux facteurs.

2/ Montrer que les deux facteurs sont premiers entre eux.

3/ Conclure sur l'irrationalité de  $\sqrt{E}$ .