

Soit a un entier naturel non nul.

a est un carré parfait si il existe un entier naturel n tel que $a=n^2$.

PARTIE 1

1/ p et q deux entiers naturels non nuls, montrer que si q^2/p^2 alors q/p .

2/ Soit a et b deux entiers premiers entre eux. Montrer que $a \times b$ est un carré parfait si et seulement si a et b sont 2 carrés parfaits.

PARTIE 2

1/ Montrer que \sqrt{a} est rationnel si et seulement si a est un carré parfait.

2/ Que peut-t-on conclure sur l'irrationnalité des nombres suivants ?

- \sqrt{p} avec p nombre premier
- $\sqrt{1+a^2}$

3/ Montrer que $\sqrt{4a+2}$ est un irrationnel.

PARTIE 3

$$E=a^3+2a^2+2a+1$$

1/ Montrer que E peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux facteurs.

2/ Montrer que les deux facteurs sont premiers entre eux.

3/ Conclure sur l'irrationnalité de \sqrt{E} .