

#### Exercice 4 (5 points) : pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

S ensemble des matrices  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  et  $ad - bc = 1$ .

#### PARTIE A : Quelques exemples de matrices appartenant à l'ensemble S

1.  $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ , le determinant vaut :  $ad - bc = -24 + 25 = 1$ . donc  $A \in S$ .

2.  $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$   $ad - 6 = 1$  donc  $ad = 7$ .

Les couples de solutions pour  $(a; d)$  sont donc :

$(7; 1), (1; 7), (-7; -1), (-1; -7)$ .

3.

a.

$$5x - 2y = 1$$

$$5 \times 1 - 2 \times 2 = 1 \quad \text{donc } 5(x - 1) = 2(y - 2)$$

5 divise  $2(y - 2)$  et 5 premier avec 2 donc d'après Gauss  $5 \mid (y - 2)$  soit  $y - 2 = 5k$ .

$$5x = 10k + 4 + 1 \quad \text{soit } x = 2k + 1$$

donc  $x = 2k + 1$  et  $y = 5k + 2$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

b.  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in S$  si  $5a - 2b = 1$ .

D'après a/, il existe une infinité de solutions :

$$A = \begin{pmatrix} 2k+1 & 5k+2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{Z}.$$