PARTIE B : Quelques propriétés des matrices appartenant à l'ensemble S

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $ad-bc=1$.

1. ad-bc=1. D'après Bezout a et b sont premiers entre eux car il existe 2 entiers relatif u =d et v=-c tels que au+bv=1.

2. $B=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

a. $AB=\begin{pmatrix} ad\text{-}bc & 0 \\ 0 & -cb+ad \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$.

b. AB=I donc A est inversible et $B=A^{-1}$.

c. $ad-bc=1$ donc $A^{-1}\in S$.

3. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

a. x'=ax+by et y'=cx+dy donc dx'-by'=dax-cbx=(ad-bc)x=x.

b. D=PGCD(x,y) et D'=PGCD(x',y').

D/x et D/y donc D/dx'-by' et D/ay'-cx'

donc D/a(dx'-by')-b(ay'-cx')=x' et D/c(dx'-by')+d(ay'-cx')=y' donc D/D'

de même D'/x' et D'/y' donc D'/dx'-by'=x et D'/ay'-cx'=y donc D'/D, donc D=D'.

4.

$\begin{cases} x_{n+1}= 2x_n+3y_n \\ y_{n+1}= x_n+2y_n \end{cases}$.

On a $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

et $A\in S$ car ad-bc=4-3=1. D'après 3/b/ $PGCD(x_n,y_n)=PGCD(x_{n-1},y_{n-1})=PGCD(x_0,y_0)=PGCD(2019,673)=673$.