

On cherche les triplets  $(a,b,p)$  solutions de l'équation (E) :

$$a(b^2-1) = p(a^2+a+1)$$

avec  $a$  et  $b$  entiers non nuls et  $p$  nombre premier.

### **PARTIE 1**

- 1/ Montrer que  $a$  et  $a^2+a+1$  sont premiers entre eux.
- 2/ Prouver que  $p^2 < p^2+p+2 < (p+1)^2$ .  $p^2+p+2$  peut-t-il être un carré parfait ?
- 3/ Que vaut  $a$  ?

### **PARTIE 2**

- 1/ Montrer que l'équation (E) se ramène à l'équation (F) :

$$b^2 = 3p + 1$$

- 2/ Prouver que seuls  $b \equiv 1[3]$  et  $b \equiv 2[3]$  peuvent vérifier (F).

- 3/ En déduire que les solutions possibles de (F) sont :

$$(F1) : p = k(3k+2)$$

et

$$(F2) : p = 3k^2 + 4k + 1$$

avec  $k$  entier non nul.

### **PARTIE 3**

- 1/ Démontrer que  $3k^2+4k+1$  ne peut pas être un nombre premier.
- 2/ Montrer que (F1) admet une seule solution.
- 3/ Quelles sont les valeurs de  $a,p,b$  solutions de (E) ?