Soit le nombre donc l'ecriture en base décimale est : $A_{a,n} = \overline{aaaa....a0}$ où le chiffre a est répété n fois.
a et n sont deux entiers non nuls.

PARTIE A

1/ Montrer que $A_{a,n} \equiv \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a[11]$.

2/ En déduire la condition sur n pour que $A_{a,n}$ soit divisible par 11.

PARTIE B

Dans cette partie, b est un entier non nul.

1/ Montrer que : $A_{a,n}=\dfrac{10a(10^n-1)}{9}$. En déduire que 10^n-1 divise $A_{9,n}$.

2/ Démontrer que $A_{b,n}$ divise $A_{a,n}$ si et seulement si b divise a.

3/ Soit a et b deux nombres entiers premiers entre eux.Déterminer le PGCD($A_{a,n}$, $A_{b,n}$) en fonction de $A_{1,n}$.

PARTIE C

Dans cette partie on considère n pair avec n=2p.

Soit $C_{a,p}=\overline{a0a0....a0}$ où le chiffre a est répété p fois.

1/ a/ Soit $D_{a,n}= A_{a,n}-C_{a,p}$. Montrer que $D_{a,n}=10\times C_{a,p}$.
b/ En déduire l'expression de $C_{a,p}$ en fonction de $A_{a,n}$

2/ p pair avec p=2q où q est un entier.
2a/ Etablir que $10^{4q}\equiv 1[101]$.
2b/ Démontrer que $C_{a,p}$ est divisible par 101.