

1

Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation :

$$17q - 11p = 2.$$

$$\begin{cases} 17q - 11p = 2 \\ 17 \times 4 - 11 \times 6 = 2 \end{cases}$$

$$\text{donc } 17(q-4) = 11(p-6)$$

17 divise 11(p-6)

17 et 11 sont premiers entre eux

donc d'après le théorème de Gauss : 17 divise p-6.

$$\text{donc : } \begin{cases} p-6 = 17m \\ 17(q-4) = 11 \times 17m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p-6 = 17m \\ q-4 = 11 \times m \end{cases}$$

donc la solution de l'équation est :

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} p = 17m + 6 \\ q = 11m + 4 \end{cases}$$

2

Résoudre dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$: $x^2 - \bar{1} = 0$

$$x^2 = \bar{1} \Leftrightarrow x^2 = 187c + 1 \quad \forall c \in \mathbb{Z}$$

$$(x+1)(x-1) = 187c = 11 \times 17c$$

11 et 17 nombres premiers donc :

$$(1) \begin{cases} \forall q \quad x+1 = 17q \\ \forall p \quad x-1 = 11p \end{cases} \quad \text{ou (2)} \begin{cases} \forall p \quad x+1 = 11p \\ \forall q \quad x-1 = 17q \end{cases} \quad \text{ou (3)} \begin{cases} x+1 = 187 \\ x-1 = c \end{cases} \quad \text{ou (4)} \begin{cases} x-1 = 187 \\ x+1 = c \end{cases}$$

donc (3) donne x=186 et (4) x=188

En soustrayant les 2 membres de (1) :

$$17q - 11p = 2 \text{ donc d'après 1) :}$$

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} p = 17m + 6 \\ q = 11m + 4 \end{cases}$$

En soustrayant les 2 membres de (2) :

$$-17q + 11p = 2 \text{ donc d'après 1) :}$$

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} p = -(17m + 6) \\ q = -(11m + 4) \end{cases}$$

En additionant les 2 membres de (1) :

$$2x = 17q + 11p$$

$$2x = 17(11m + 4) + 11(17m + 6)$$

$$2x = 187(2m) + 134$$

$$\text{donc } x = 187m + 67$$

avec (2) on obtient $x = -(187m + 67)$

Conclusion : les solutions de l'équation sont :

$$\forall m \in \mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{l} x = (187m + 67) \\ x = -(187m + 67) \\ x = 186 \\ x = 188 \end{array} \right.$$