

$$f_k(x) = \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, k > 0.$$

1**a.**

$$f'_k(x) = \frac{kx^{k-1}\sqrt{x^2+1} - \frac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}}x^k}{x^2+1}$$

$$f'_k(x) = \frac{kx^{k-1}(x^2+1) - x^{k+1}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'_k(x) = \frac{kx^{k+1} + kx^{k-1} - x^{k+1}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'_k(x) = \frac{x^{k-1}(x^2(k-1) + k)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$\forall k \geq 1$ $f'_k(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ donc la fonction f_k est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Si k est pair alors f_k est décroissante sur $\mathbb{R}^-$

Si k est impair alors f_k est croissante sur $\mathbb{R}$

b.

$$f_k(x) = \frac{x^{k-1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \text{ lorsque } x \geq 0$$

$$\text{donc } \frac{f_k(x)}{x} = \frac{x^{k-2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\text{si } k=2 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_k(x)}{x} = 1$$

$$\text{Si } k > 2 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_k(x)}{x} = \infty$$

$$\text{Si } k < 2 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_k(x)}{x} = 0$$

donc :

si $k=2$ alors $f_2(x)$ admet une branche infinie $y=x$

Si $k > 2$ alors $f_k(x)$ admet une branche infinie de direction Oy

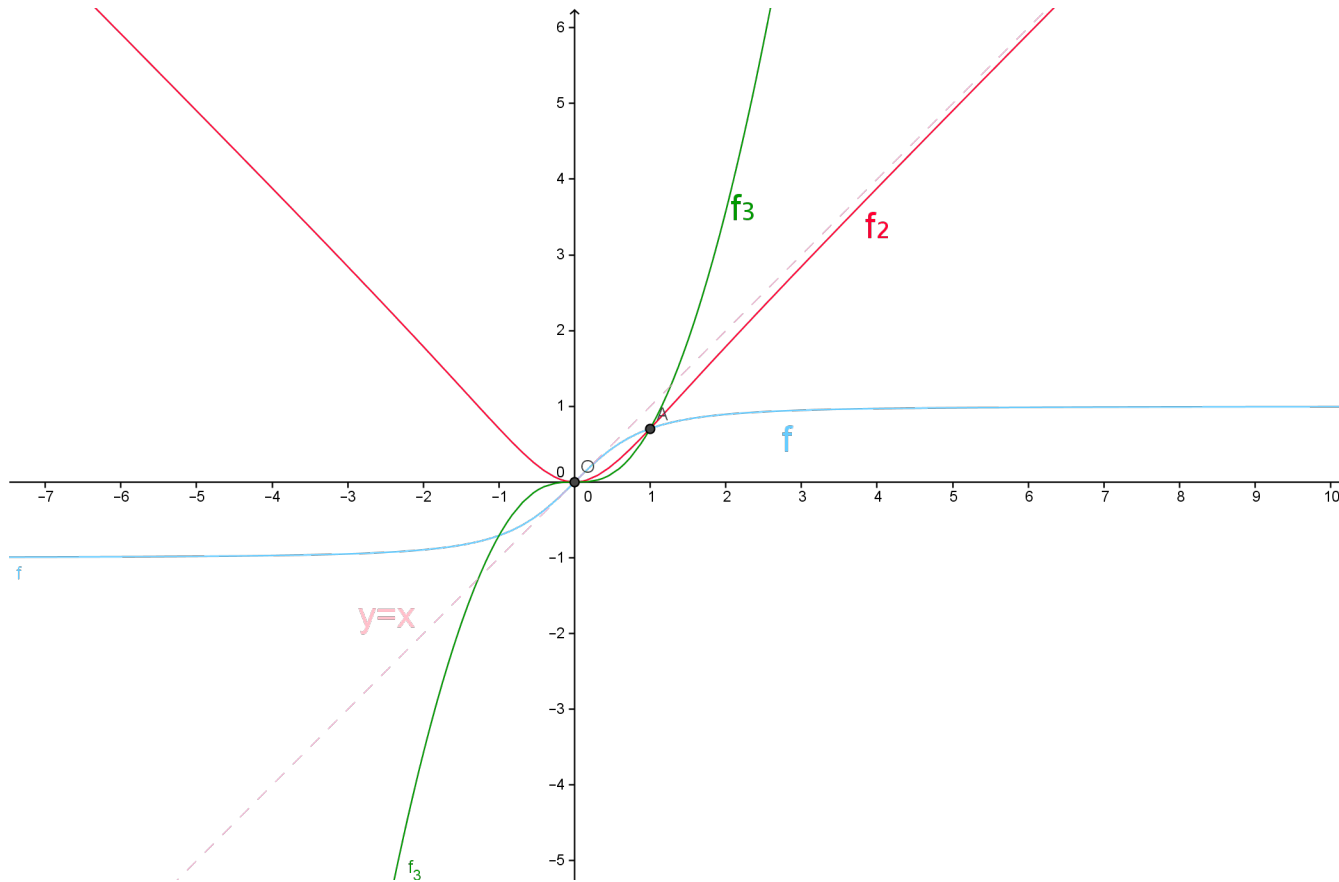
Si $k < 2$ alors $f_k(x)$ admet une branche infinie de $y=0$

c.

$$\forall k > 0 \quad f_k(0) = 0$$

$$\forall k > 0 \quad f_k(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc O et A $\left(1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ points fixes pour f_k



2

$$I_k = \int_0^1 f_k(x) dx \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

a.

$$g(x) = \text{Log}(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$g'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1})}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

donc $g(x)$ est une primitive de $f_0(x)$.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = [\log(x + \sqrt{x^2+1})]_0^1$$

$$I_0 = \log(1 + \sqrt{2})$$

b.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left[\frac{\sqrt{x^2+1}}{2} \right]_0^1$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

c.

On considère $k \geq 2$:

$$I_k = \int_0^1 \frac{x^k + x^{k-2}}{\sqrt{x^2+1}} dx - \int_0^1 \frac{x^{k-2}}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$I_k = \int_0^1 x^{k-2} \sqrt{x^2+1} dx - I_{k-2}$$

Intégrons par parties :

$$f'(x) = x^{k-2} \quad f(x) = \frac{x^{k-1}}{k-1}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2+1} \quad g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$I_k = \left[\frac{x^{k-1} \sqrt{x^2+1}}{k-1} \right]_0^1 - \frac{1}{k-1} \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}} dx - I_{k-2}$$

$$I_k = \frac{\sqrt{2}}{k-1} - \frac{1}{k-1} I_k - I_{k-2}$$

$$(k-1)I_k = \sqrt{2} - I_k - (k-1)I_{k-2}$$

$$kI_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2} \quad (1)$$

En posant $k=2$ dans (1) : $2I_2 = \sqrt{2} - I_0 = \sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2})$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$$

En posant $k=3$ dans (1) : $3I_3 = \sqrt{2} - 2I_1 = \sqrt{2} - 2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = 1$

$$I_3 = \frac{1}{3}$$

d.

$$I_k = \int_0^1 f_k(x) dx$$

$$\forall x \geq 0 \quad \frac{x^k}{x^2+1} \leq x^k \text{ donc } I_k \leq \int_0^1 x^k dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1$$

$$\text{donc } I_k \leq \frac{1}{k+1}$$

or $f_k(x)$ est positive sur $[0,1]$ donc $I_k \geq 0$

$$\text{soit } 0 \leq I_k \leq \frac{1}{k+1}$$

$$\text{donc } \lim_{k \rightarrow \infty} I_k = 0$$

3

$$u_n = f_k(u_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a.

$$0 < u_0 < 1 \text{ donc } u_1 = \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2 + 1}} < u_0 < 1 \quad \forall k > 0$$

De plus $u_1 > 0$ car $u_0 > 0$

$$u_n = \frac{u_{n-1}^k}{\sqrt{u_{n-1}^2 + 1}} \text{ si } u_{n-1} > 0 \text{ alors } u_n > 0$$

on a $u_n < u_{n-1}^k$ or si $u_{n-1} < 1$ alors $u_{n-1}^k < u_{n-1} < 1$ donc $u_n < 1$ et par récurrence on en déduit que :

$$0 < u_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si $u_{n-1} > u_n$ alors $f_k(u_{n-1}) > f_k(u_n)$ car f_k est strictement croissante sur $]0; 1[$ d'après 1.a) donc $u_n > u_{n+1}$ et par récurrence on en déduit que u_n est décroissante.

b.

$$k \geq 2 \text{ et } n \geq 1 \quad u_n = \frac{u_{n-1}^k}{\sqrt{u_{n-1}^2 + 1}} = \frac{u_{n-1}^k}{|u_{n-1}| \sqrt{1 + \frac{1}{u_{n-1}^2}}}$$

or $u_{n-1} > 0$ d'après a)

$$\text{donc } u_n = \frac{u_{n-1}^{k-1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{u_{n-1}^2}}} < \frac{u_{n-1}^{k-1}}{\sqrt{2}} \text{ car } \frac{1}{u_n^2} > 1 \text{ puisque } u_n < 1$$

or pour $k > 1$ $u_{n-1}^{k-1} < u_{n-1}$ car $u_{n-1} < 1$

$$\text{donc } u_n < \frac{u_{n-1}}{\sqrt{2}} \quad \forall k > 1$$

$$u_n < \frac{u_{n-1}}{\sqrt{2}} < \frac{u_{n-2}}{\sqrt{2}^2} < \frac{u_0}{\sqrt{2}^n}$$

$$\text{donc } 0 < u_n < \frac{u_0}{\sqrt{2}^n}$$

il en résulte que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

4

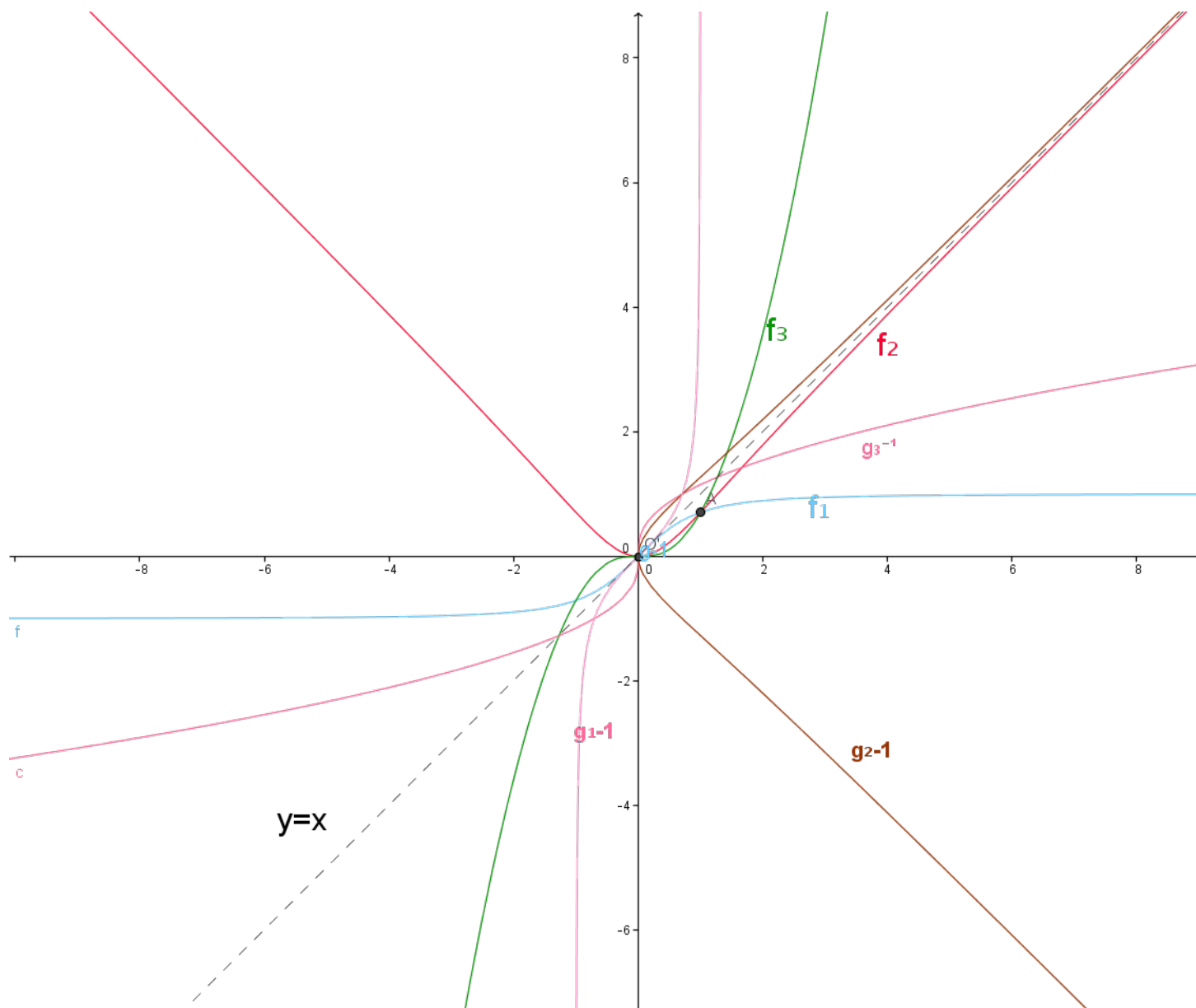
$$g_k(x) = f_k(x)dx \quad \forall x \in [0;1]$$

a.

d'après 1.a) f_k est strictement croissante sur $[0;1]$ pour $k > 1$ et de plus f_k est continue sur $[0;1]$ donc g_k est bijective et admet une fonction réciproque g_k^{-1} .

b.

Les courbes s'obtiennent par symétrie par rapport à la droite $y=x$.



c.

$$y = f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow (x^2 + 1)y^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2(1 - y^2) = y^2$$

$$\text{donc } g_1^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1 - x^2}}$$

$$y = f_2(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{x^4}{1 + x^2} \Leftrightarrow$$

$$x^4 - x^2y^2 - y^2 = 0$$

posons $X = x^2$ on a alors :

$$X^2 - Xy^2 - y^2 = 0$$

$$\Delta = y^4 + 4y^2 = y^2(y^2 + 4)$$

$$X = \frac{1}{2}(y^2 + y\sqrt{(y^2 + 4)}) \text{ (l'autre solution est impossible car } X > 0)$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}(y^2 + y\sqrt{(y^2 + 4)})}$$

$$g_2^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + x\sqrt{(x^2 + 4)})}.$$