1

a.

$1982 = 1 \times 1982 + 0 \quad donc\ b_1 = 1982$
$1982 = 8 \times 247 + 6 \quad donc\ b_8 = 247$
$1982 = 9 \times 220 + 2 \quad donc\ b_9 = 220$
$1982 = 1982 \times 1 + 0 \quad donc\ b_{1982} = 1$

b.

$b \leq b_8 \Rightarrow 8b \leq 8b_8 \quad or\ 8b_8 \leq 1982$
$inversement\ 8b \leq 1982 \Rightarrow b \leq 247\ car\ b \in \mathbb{N} \Rightarrow b \leq b_8$

$b \succ b9 \Leftrightarrow 9b \succ 9b_9 \Rightarrow 9b \succ 1980$
$or\ 9b \neq 1981\ et\ 9b \neq 1982\ car\ b \in \mathbb{N}\ donc\ 9b \succ 1982$
$inversement\ 9b \succ 1982 \Rightarrow b \succ 220\ car\ b \in \mathbb{N}\ donc\ b \succ b_9$

c.

$b \in S_8\ donc\ 1982 = b \times 8 + r_8\ avec\ 0 \leq r_8 \prec b$
$donc\ 8b = 1982 - r_8\ donc\ 8b \leq 1982.$

$9b = 8b + b = 1982 - r_8 + b\ or\ b - r_8 \succ 0\ donc\ 9b \succ 1982$

En appliquant 1b on en déduit :
$b \in S_8 \Rightarrow b_9 \prec b \leq b_8$

$inversement\ b \leq b_8 \Rightarrow 8b \leq 1982 \Rightarrow 8b = 1982 - r\ avec\ r \geq 0$
$de\ plus\ b \succ b_9 \Rightarrow 9b \succ 1982\ donc\ 8b + b = 1982 - r + b \succ 1982 \Rightarrow r \prec b$
$conclusion\ :\ b_9 \prec b \leq b_8 \Rightarrow \exists r\ tel\ que\ a = b \times 8 + r\ avec\ 0 \leq r \leq b\ donc\ b \in S_8$

$S_8 = \{b \in \mathbb{N}; b_9 \prec b \leq b_8\}$

$Card(S_8) = b_8 - b_9 = 247 - 220 = 27$

2

$a \in \mathbb{N}\ et\ 1 \leq q \prec a$

a.

$b \in S_q \Leftrightarrow a = bq + r\ avec\ 0 \leq r \prec b$
$de\ plus\ a = q \times b_q + r_q\ et\ 0 \leq r_q \prec q$

Montrons que $\mathbf{b \leq b_q \Leftrightarrow qb \leq a}$
$si\ b \leq b_q \Rightarrow qb \leq qb_q = a - r_q\ donc\ qb \leq a\ car\ r_q \geq 0$
$si\ qb \leq a \Rightarrow qb \leq qb_q + r_q\ donc\ b \leq b_q + \frac{r_q}{q}$
$or\ \frac{r_q}{q} \prec 1\ donc\ b \leq b_q$

Montrons que $\mathbf{b \succ b_{q+1} \Leftrightarrow (q+1)b \succ a}$
$a = (q+1)b_{q+1} + r_{q+1}\ et\ 0 \leq r_{q+1} \prec q+1$

$si\ b \succ b_{q+1}\ alors\ (q+1)b \succ (q+1)b_{q+1} = a - r_{q+1}$
$donc\ (q+1)b > a - 1 - q$
$supposons\ (q+1)b \leq a\ alors \quad a - 1 - q \prec (q+1)b \leq a$
$donc\ \exists k\ tel\ que:\ (q+1)b = a - q + k\ avec\ 0 \leq k \leq q$
$donc\ a = (q+1)b + r\ avec\ r = q - k\ donc\ 0 \leq r \leq q \prec q+1$
or la division euclidienne de a par q+1 n'admet qu'une seule solution donc $r = r_{q+1}$ et $b = b_{q+1}$
impossible car $b \succ b_{q+1}$.
$donc\ b \succ b_{q+1} \Rightarrow (q+1)b \succ a$

$si\ (q+1)b \succ a \Rightarrow (q+1)b \succ (q+1)b_{q+1} + r_{q+1} \Rightarrow b \succ b_{q+1} + \frac{r_{q+1}}{q+1}$
$or\ \frac{r_{q+1}}{q+1} \succ 0\ donc\ b \succ b_{q+1}$

$b \in S_q\ donc\ a = bq + r\ avec\ 0 \leq r \prec b$
$qb = a - r\ avec\ r \geq 0\ donc\ qb \leq a \Rightarrow b \prec b_q$
$(q+1)b = qb + b = a - r + b\ avec\ b - r \succ 0\ donc\ (q+1)b \succ a$
$\Rightarrow\ b \succ b_{q+1}$
$Inversement\ si\ b \leq b_q\ alors\ qb \leq a\ donc\ qb = a - r\ avec\ r \geq 0$
$si\ b \succ b_{q+1}\ alors\ (q+1)b \succ a\ donc\ qb \succ a - b\ soit\ a - r \succ a - b\ \Rightarrow\ r \prec b$
$donc\ b \prec b_q\ et\ b \succ b_{q+1} \Rightarrow \exists r\ tel\ que\ a = bq + r\ avec\ o \leq r \prec b\ donc\ b \in S_q$
$donc\ \mathbf{S_q = \{b \in \mathbb{N}; b_{q+1} \prec b \leq b_q\}}$

b.

$card(S_q) = b_q - b_{q+1}$

$\sum_{q=1}^{a} card(S_q) = \sum_{q=1}^{a}(b_q - b_{q+1}) = -b_{a+1} + b_1$

$b_1 = a \quad car\ a = 1 \times a + 0$
$b_{a+1} = 0 \quad car\ a = (a+1) \times 0 + a$

$donc\ \forall \mathbf{a} \in \mathbb{N}\ \mathbf{\sum_{q=1}^{a} card(S_q) = a}$