Soit f_α l'application de l' espace affine ε dans ε qui associe au point M le point M' :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' & = -z-\alpha \\ y' & = -x \\ z' & = y-2 \end{array}\right.$$

1

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

f_α est donc une application affine donc l'application lineaire est representée par la matrice Q :

Q= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $Q^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Q \times Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Q est donc une matrice orthogonale et $det(Q) = -1 \times 1 \times -1 = 1$ donc Q est une matrice de rotation et f_α est un déplacement.
Comme Q n'est pas l'identite, f_α est soit une rotation soit un vissage.

2

f_α est une rotation si elle admet des points invariants soit :
$f_\alpha(M) = M$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z+\alpha \\ -x \\ y-2 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2-y+\alpha \\ y = y-2-\alpha \\ z = y-2 \end{array}\right.$$

donc $-2-\alpha = 0$ donc f_α est une rotation si $\alpha = -2$.

L'axe de la rotation est determiné par les points invariants :

$$\left\{ \begin{array}{l} x=-y \\ z=y-2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=0 \\ y-z=2 \end{array} \right.$$

Les points B $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ apartiennent à l'axe de rotation (D) dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'angle de rotation est donné par : $Trace(Q) = 1 + 2cos\theta$ donc $1 + 2cos\theta = 0$ soit $cos\theta = -\frac{1}{2}$
donc $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$

Le sens de la rotation est donné par le signe de $det(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{f_{-2}(n)}, \overrightarrow{BC})$
avec $\overrightarrow{n}$ vecteur normal à (D).

En prenant $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 0 - 0 - 1 - 2 = -3$

donc f_{-2} est une rotation affine de direction $\overrightarrow{BC}$ et d'angle $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

3

$\alpha = 1$ donc f_α est un vissage car il n'y a pas de point invariant. $f_\alpha = T_{\overrightarrow{u}} \circ Q$ Ou Q est la rotation d'axe (D) et T une translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. L'axe du vissage est la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$ dont les points P sont tels que $\overrightarrow{PP'} = \lambda\overrightarrow{BC}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'-x=\lambda \\ y'-y=-\lambda \\ z'-z=-\lambda \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -z+1-x=\lambda \\ -x-y=-\lambda \\ y-2-z=-\lambda \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -z+1-x=x+y \\ -x-y=y-2-z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x+y+z=1 \\ x+2y-z=2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=1 \\ x+z=0 \end{array} \right.$$

L'axe du vissage est la droite passant par P $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de direction $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.