1

a.

$a = 9p + 4q$
$b = 2p + q$
$donc\ a = 4b + p\ or\ p = \frac{1}{2}(b - q) \Rightarrow p \prec b$
il en résulte que p est le reste de la division euclidienne de a par b
$donc\ PGCD(a, b) = PGCD(b, p) = PGCD(2p + q, p)$

soit i=PGCD(p,q) et j=PGCD(2p+q,p)
j divise 2p+q et p donc j divise (2p+q)-2p=q et p soit j divise PGCD(p,q)=i.
inversement i divise p et q donc i divise 2p+q et p soit i divise j donc i=j
soit PGCD(a,b)=PGCD(2p+q,p)=PGCD(p,q)

b.

On pose q=1 et on applique a/ PGCD(9p+4,2p+1)=PGCD(p,1)=1 donc
9p+4 et 2p+1 sont premiers entre eux.

$PGCD(9p + 4, 2p + 1) \times PPCM(9p + 4, 2p + 1) = (9p + 4)(2p + 1)$
$donc\ PPCM(9p + 4, 2p + 1) = (9p + 4)(2p + 1) = 18p^2 + 17p + 1$

2

Calcul du PGCD (9p+4,2p-1) en fonction de p :

Soit d=PGCD (9p+4,2p-1). d/9p+4 et d/2p-1 donc d/2(9p+4)-9(2p-1)=17.

si $p < 9$ alors 2p-1<17 donc d=1.
si $p \geq 9$:
$9p + 4 = 4(2p - 1) + p + 8$ avec $p + 8 \prec 2p - 1\ car\ p \succ 7$
p+8 reste de la division euclidienne de 9p+4 par 2p-1
$PGCD(9p + 4, 2p - 1) = PGCD(2p - 1, p + 8)$
$or\ 2p - 1 = p + 8 + p - 9\ si\ p \geq 9$
$donc\ PGCD(2p - 1, p + 8) = PGCD(p + 8, p - 9)$
le PGCD divise p+8 et p-9 donc (p+8)-(p-9)=17 donc PGCD(p+8,p-9)=17 ou 1.
$p - 9 = 17k \Rightarrow p = 9 + 17k\ alors\ PGCD(p + 8, p - 9) = 17$ sinon PGCD(p+8,p-9)=1

Conclusion :

$$\begin{cases} si\ p = 9 + 17k\ alors\ PGCD(9p + 4, 2p - 1) = 17 \\ si\ p \neq 9 + 17k\ alors\ PGCD(9p + 4, 2p - 1) = 1 \end{cases}$$