

E est une espace affine et $\vec{E}$ son espace vectoriel associé.
 f_1 et f_2 deux applications affines et $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ les endomorphismes associés.
 $f_1(M) = M_1$ et $f_2(M) = M_2$ et M' image par f du point M.
 $f(M)$ barycentre de $\alpha_1 M_1$ et $\alpha_2 M_2$ et $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Partie A

1

f_1 translation de vecteur $\vec{V}_1$ et f_2 translation de vecteur $\vec{V}_2$
 $M_1 = M + \vec{V}_1$
 $M_2 = M + \vec{V}_2$
 $f(M) = \alpha_1 f_1(M) + \alpha_2 f_2(M)$
 $= \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2$
 $f(M) = M + \alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2$
 f est donc une translation de vecteur $\alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2$.

2

E est un plan affine, D une droite affine, D' une droite vectorielle de direction distincte de D.
 $f_1 = \text{Id}$ et f_2 la projection affine sur D de direction D'.

a.

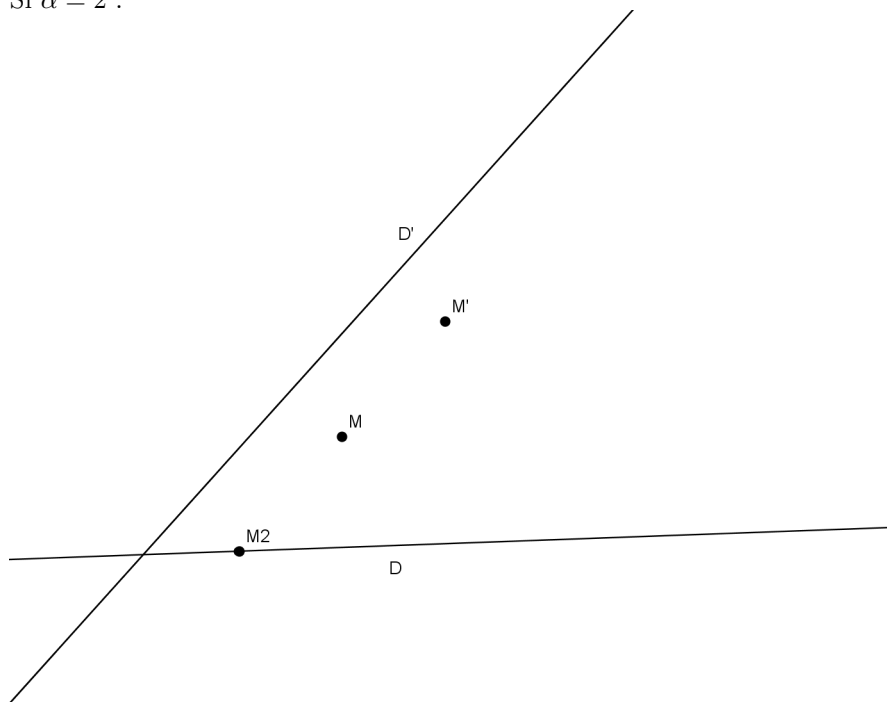
Soit M un point de D : $f(M) = \alpha_1 f_1(M) + \alpha_2 f_2(M)$
 $f(M) = \alpha_1 M + \alpha_2 f_2(M)$ or $f_2(M) = M$ car f_2 projection affine sur D.
 $f(M) = (\alpha_1 + \alpha_2)M = M$

Les points de D sont donc invariants par f.

b.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_2 M'} &= f(M) - f_2(M) \\ \overrightarrow{M_2 M'} &= \alpha_1 M + \alpha_2 f_2(M) - f_2(M) \\ \overrightarrow{M_2 M'} &= \alpha_1 M + (\alpha_2 - 1)M_2 = \alpha_1 M - \alpha_1 M_2 \\ \overrightarrow{M_2 M'} &= \alpha_1 \overrightarrow{M_2 M}\end{aligned}$$

Si $\alpha = 2$:



Si $\alpha = -1$ alors f est une symétrie par rapport à D de direction D' .

Partie B

1

$$f_1(M) = f_1(O) + \overrightarrow{f_1(OM)}$$

$$f_2(M) = f_2(O) + \overrightarrow{f_2(OM)}$$

$$f(M) = \alpha_1 f_1(M) + \alpha_2 f_2(M)$$

$$= \alpha_1 f_1(O) + \alpha_2 f_2(O) + \alpha_1 \overrightarrow{f_1(OM)} + \alpha_2 \overrightarrow{f_2(OM)}$$

$$= f(O) + \alpha_1 \overrightarrow{f_1(OM)} + \alpha_2 \overrightarrow{f_2(OM)}$$

En posant $O' = f(O)$:

$$\overrightarrow{O'M'} = \alpha_1 \overrightarrow{f_1(OM)} + \alpha_2 \overrightarrow{f_2(OM)}$$

2

f_1 et f_2 deux homothéties de rapport k_1 et k_2 :

$$\overrightarrow{O_1M_1} = k_1 \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{O_2M_2} = k_2 \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{O'M'} = \alpha_1 \overrightarrow{f_1(OM)} + \alpha_2 \overrightarrow{f_2(OM)} = \alpha_1 \overrightarrow{O_1M_1} + \alpha_2 \overrightarrow{O_2M_2}$$

$$= (\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2) \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{O'M'} = ((\alpha_1(k_1 - k_2) + k_2) \overrightarrow{OM})$$

— $k_1 \neq k_2$ et $\alpha_1 = \frac{1-k_2}{k_1-k_2}$ alors $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{Id}$ et f est une translation.

— $k_1 \neq k_2$ et $\alpha_1 = \frac{-k_2}{k_1-k_2}$ alors f est une application constante.

— dans les autres cas f est une homothétie de rapport $\alpha_1(k_1 - k_2) + k_2$.

3

a.

(A, B, C, D) parallélogramme du plan affine E. Soit g une application affine. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$g(B) = g(A) + \overrightarrow{g(AB)}$$

$$g(C) = g(D) + \overrightarrow{g(DC)}$$

$$\text{or } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ donc } \overrightarrow{g(AB)} = \overrightarrow{g(DC)} \text{ donc } g(B) - g(A) = g(C) - g(D)$$

$$\text{donc } \overrightarrow{g(A)g(B)} = \overrightarrow{g(D)g(C)}$$

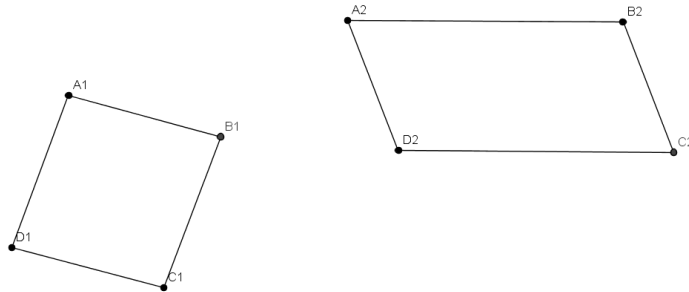
$(g(A), g(B), g(C), g(D))$ est donc un parallélogramme.

b.

Soit deux parallélogrammes (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) .

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$$

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2}$$



(A_1, B_1, C_1, D_1) non aplati donc $\overrightarrow{A_1B_1}$ et $\overrightarrow{A_1D_1}$ sont non colinéaires et $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1D_1})$ forment une base du plan affine.

Soit l'application linéaire $\vec{f}_2$ définie comme image de cette base telle que :

$$\begin{cases} \vec{f}_2(\overrightarrow{A_1B_1}) = \overrightarrow{A_2B_2} \\ \vec{f}_2(\overrightarrow{A_1D_1}) = \overrightarrow{A_2D_2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f_2(A_1C_1)} &= \vec{f}_2(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1}) \\ &= \vec{f}_2(\overrightarrow{A_1B_1}) + \vec{f}_2(\overrightarrow{A_1D_1}) = \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{A_2D_2} = \overrightarrow{A_2C_2} \end{aligned}$$

Soit l'application affine f_2 d'endomorphisme $\vec{f}_2$ définie telle que : $f_2(A_1) = A_2$

Pour tout point de M :

$$\begin{aligned} f_2(M) &= f_2(A_1) + \vec{f}_2(\overrightarrow{A_1M}) \\ f_2(B_1) &= A_2 + \vec{f}_2(\overrightarrow{A_1B_1}) = A_2 + \overrightarrow{A_2B_2} = B_2 \\ f_2(C_1) &= A_2 + \vec{f}_2(\overrightarrow{A_1C_1}) = A_2 + \overrightarrow{A_2C_2} = C_2 \\ f_2(D_1) &= A_2 + \vec{f}_2(\overrightarrow{A_1D_1}) = A_2 + \overrightarrow{A_2D_2} = D_2 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} A' &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \\ B' &= \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 \\ C' &= \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 \\ D' &= \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 \\ \overrightarrow{A'B'} &= B' - A' = \alpha_1 \overrightarrow{A_1B_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_2B_2} = \alpha_1 \overrightarrow{D_1C_1} + \alpha_2 \overrightarrow{D_2C_2}. \\ \overrightarrow{D'C'} &= C' - D' = \alpha_1 \overrightarrow{D_1C_1} + \alpha_2 \overrightarrow{D_2C_2}. \\ \overrightarrow{A'B'} &= \overrightarrow{D'C'} \text{ donc } (A', B', C', D') \text{ est un parallélogramme.} \end{aligned}$$

Partie C

E est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. A tout point M de E on associe son affixe z.

1

Soit z_1 et z_2 les affixes des images du point M par les similitudes f_1 et f_2 :

$$z_1 = a_1 z + b$$

$$z_2 = a_2 z + b$$

$$z' = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = (a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2) z + b_1 + b_2$$

— Si $k = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 \neq 0$ alors f est une similitude de rapport $|k|$.

— Si $k = 0$ alors $z' = b_1 + b_2$ et f est une application constante.

2

f_1 et f_2 deux similitudes de rapport k et d'angle θ :

$$z_1 - a_1 = k e^{i\theta} (z - a_1)$$

$$z_2 - a_2 = k e^{i\theta} (z - a_2)$$

$$z' = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + k e^{i\theta} (z - (a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2))$$

Soit a l'affixe du barycentre A de (A_1, α_1) et (A_2, α_2) :

$$z' - a = k e^{i\theta} (z - a)$$

donc f similitude de rapport k et d'angle θ et de centre A.

3

a.

g est une similitude directe donc conserve les angles orientés donc :

$$(\overrightarrow{g(A)g(B)}, \overrightarrow{g(A)g(D)}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$$

(A,B,C,D) est un carré donc les 4 angles droits sont conservés par la similitude g de rapport k.

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{DC}\| = \|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \Rightarrow$$

$$k \|\overrightarrow{AB}\| = k \|\overrightarrow{DC}\| = k \|\overrightarrow{AD}\| = k \|\overrightarrow{BC}\| \Rightarrow$$

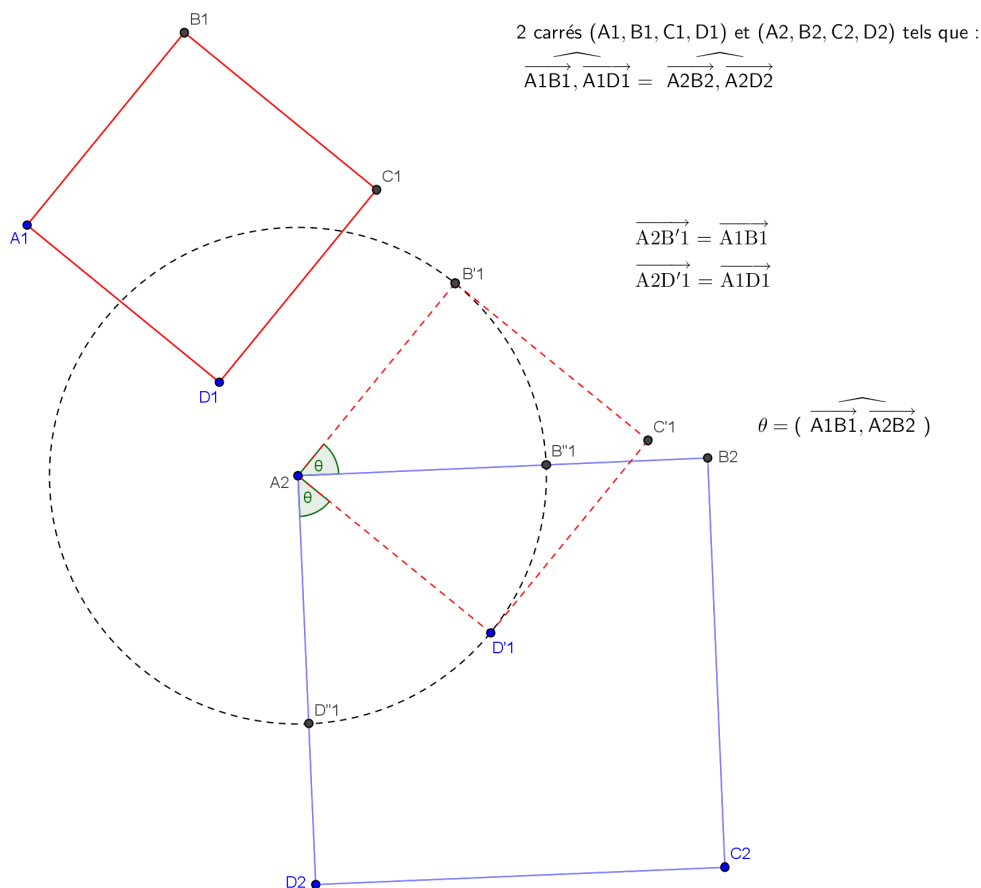
$$\|\overrightarrow{g(A)g(B)}\| = \|\overrightarrow{g(D)g(C)}\| = \|\overrightarrow{g(A)g(D)}\| = \|\overrightarrow{g(B)g(C)}\|$$

Il en résulte que $(g(A), g(B), g(C), g(D))$ est un carré.

b.

Soit $\vec{f}_2 = \overrightarrow{H_{A_2, k}} \circ \overrightarrow{R_{A_2, \theta}}$ composée d'une homothétie H de centre A_2 et de rapport k et d'une rotation R de centre A_2 et d'angle θ . Le rapport de l'homothétie vaut $k = \frac{\|\overrightarrow{A_2 B_2}\|}{\|\overrightarrow{A_1 B_1}\|}$.

Par définition $\vec{f}_2$ est une similitude directe du plan E.



Soit f_2 la similitude affine telle que :

$$f_2(A_1) = A_2$$

$$f_2(M) = f_2(A_1) + \overrightarrow{f_2(A_1M)}$$

$$\overrightarrow{f_2(A_1B_1)} = \overrightarrow{H_{A_2,k}} \circ \overrightarrow{R_{A_2,\theta}}(\overrightarrow{A_2B'_1}) = \overrightarrow{H_{A_2,k}}(\overrightarrow{A_2B''_1})$$

$$\text{or } \lambda \overrightarrow{A_2B''_1} = \overrightarrow{A_2B_2} \text{ avec } \lambda > 0$$

$$\text{donc } \lambda \|\overrightarrow{A_2B''_1}\| = \|\overrightarrow{A_2B_2}\|$$

La rotation R conserve les longueurs donc :

$$\|\overrightarrow{A_2B''_1}\| = \|\overrightarrow{A_2B'_1}\| = \|\overrightarrow{A_1B_1}\| \text{ donc } \lambda = k \text{ et } k \overrightarrow{A_2B''_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$$

$$\overrightarrow{f_2(A_1B_1)} = \overrightarrow{H_{A_2,k}}(\overrightarrow{A_2B''_1}) = \overrightarrow{A_2B_2}$$

$$f_2(B_1) = f_2(A_1) + \overrightarrow{f_2(A_1B_1)}$$

$$= A_2 + \overrightarrow{A_2B_2} = B_2$$

De même :

$$\overrightarrow{f_2(A_1D_1)} = \overrightarrow{H_{A_2,k}} \circ \overrightarrow{R_{A_2,\theta}}(\overrightarrow{A_2D'_1}) = \overrightarrow{H_{A_2,k}}(\overrightarrow{A_2D''_1})$$

$$\text{or } \lambda \overrightarrow{A_2D''_1} = \overrightarrow{A_2D_2} \text{ avec } \lambda > 0$$

$$\text{donc } \lambda \|\overrightarrow{A_2 D_1''}\| = \|\overrightarrow{A_2 D_2}\|$$

La rotation R conserve les longueurs donc :

$$\|\overrightarrow{A_2 D_1''}\| = \|\overrightarrow{A_2 D_1'}\| = \|\overrightarrow{A_1 D_1}\|$$

$$\text{or } \|\overrightarrow{A_1 D_1}\| = \|\overrightarrow{A_1 B_1}\|$$

$$\text{et } \|\overrightarrow{A_2 D_2}\| = \|\overrightarrow{A_2 B_2}\|$$

$$\text{donc } \lambda \overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{A_2 B_2} \text{ soit } \lambda = k$$

$$\text{il en résulte que } k \overrightarrow{A_2 D_1''} = \overrightarrow{A_2 D_2}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{f_2(A_1 D_1)} = \overrightarrow{H_{A_2, k}(A_2 D_1'')} = \overrightarrow{A_2 D_2}$$

$$f_2(D_1) = f_2(A_1) + \overrightarrow{f_2(A_1 D_1)}$$

$$= A_2 + \overrightarrow{A_2 D_2} = D_2$$

$$f_2(C_1) = f_2(A_1) + \overrightarrow{f_2(A_1 C_1)}$$

$$= A_2 + \overrightarrow{f_2(\overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{A_1 D_1})}$$

$$= A_2 + \overrightarrow{f_2(A_1 B_1)} + \overrightarrow{f_2(A_1 D_1)}$$

$$= A_2 + \overrightarrow{A_2 B_2} + \overrightarrow{A_2 D_2} = A_2 + \overrightarrow{A_2 C_2}$$

$$\text{donc } f_2(C_1) = C_2$$

$$A' = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$$

$$B' = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$$

$$C' = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$$

$$D' = \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2$$

$$\overrightarrow{A' B'} = B' - A' = \alpha_1 \overrightarrow{A_1 B_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_2 B_2}$$

$$\overrightarrow{D' C'} = C' - D' = \alpha_1 \overrightarrow{D_1 C_1} + \alpha_2 \overrightarrow{D_2 C_2}.$$

d'après B-3c/ (A', B', C', D') est un parallélogramme et $\overrightarrow{A' B'} = \overrightarrow{D' C'}$

$$\overrightarrow{A' B'} \cdot \overrightarrow{A' D'} = (\alpha_1 \overrightarrow{A_1 B_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_2 B_2}) \cdot (\alpha_1 \overrightarrow{A_1 D_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_2 D_2})$$

$$\overrightarrow{A' B'} \cdot \overrightarrow{A' D'} = \alpha_1 \alpha_2 \overrightarrow{A_1 B_1} \cdot \overrightarrow{A_2 D_2} + \alpha_1 \alpha_2 \overrightarrow{A_2 B_2} \cdot \overrightarrow{A_1 D_1}$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 \|\overrightarrow{A_1 B_1}\| \|\overrightarrow{A_2 D_2}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_2 D_2}}) + \alpha_1 \alpha_2 \|\overrightarrow{A_2 B_2}\| \|\overrightarrow{A_1 D_1}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{A_2 B_2}, \overrightarrow{A_1 D_1}})$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 \|\overrightarrow{A_1 B_1}\| \|\overrightarrow{A_2 D_2}\| \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + \alpha_1 \alpha_2 \|\overrightarrow{A_2 B_2}\| \|\overrightarrow{A_1 D_1}\| \cos(-\theta + \frac{\pi}{2})$$

(A₁, B₁, C₁, D₁) et (A₂, B₂, C₂, D₂) sont deux carrés donc :

$$\|\overrightarrow{A_2 B_2}\| = \|\overrightarrow{A_2 D_2}\| \text{ et } \|\overrightarrow{A_1 D_1}\| = \|\overrightarrow{A_1 B_1}\|$$

$$\overrightarrow{A' B'} \cdot \overrightarrow{A' D'} = \alpha_1 \alpha_2 \|\overrightarrow{A_1 B_1}\| \|\overrightarrow{A_2 D_2}\| (-\sin(\theta) + \sin(\theta)) = 0$$

$\overrightarrow{A' B'} \perp \overrightarrow{A' D'}$ et (A', B', C', D') est un parallélogramme donc (A', B', C', D') admet quatre angles droits.

$$\overrightarrow{A' C'} \cdot \overrightarrow{B' D'} = (\alpha_1 \overrightarrow{A_1 C_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_2 C_2}) \cdot (\alpha_1 \overrightarrow{B_1 D_1} + \alpha_2 \overrightarrow{B_2 D_2})$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 \overrightarrow{A_1 C_1} \cdot \overrightarrow{B_2 D_2} + \alpha_1 \alpha_2 \overrightarrow{A_2 C_2} \cdot \overrightarrow{B_1 D_1}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_1 \alpha_2 \|\overrightarrow{A_1 C_1}\| \|\overrightarrow{B_2 D_2}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{A_1 C_1}, \overrightarrow{B_2 D_2}}) + \alpha_1 \alpha_2 \|\overrightarrow{A_2 C_2}\| \|\overrightarrow{B_1 D_1}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{A_2 C_2}, \overrightarrow{B_1 D_1}}) \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \|\overrightarrow{A_1 C_1}\| \|\overrightarrow{B_2 D_2}\| \cos(\frac{\pi}{2} + \widehat{\overrightarrow{B_1 D_1}, \overrightarrow{B_2 D_2}}) + \alpha_1 \alpha_2 \|\overrightarrow{A_2 C_2}\| \|\overrightarrow{B_1 D_1}\| \cos(\frac{\pi}{2} + \widehat{\overrightarrow{B_2 D_2}, \overrightarrow{B_1 D_1}}) \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \|\overrightarrow{A_1 C_1}\| \|\overrightarrow{B_2 D_2}\| (-\sin(\widehat{\overrightarrow{B_1 D_1}, \overrightarrow{B_2 D_2}}) + \sin(\widehat{\overrightarrow{B_1 D_1}, \overrightarrow{B_2 D_2}})) = 0.
\end{aligned}$$

$$\text{car } \begin{cases} \|\overrightarrow{A_2 C_2}\| = \|\overrightarrow{B_2 D_2}\| \\ \|\overrightarrow{B_1 D_1}\| = \|\overrightarrow{A_1 C_1}\| \end{cases} \text{ puisque } (A_1, B_1, C_1, D_1) \text{ et } (A_2, B_2, C_2, D_2) \text{ sont deux carrés.}$$

donc $\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 0$ soit $\overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{B'D'}$.

(A', B', C', D') est un parallélogramme avec quatre angles droits dont les diagonales sont perpendiculaires, c'est donc un carré.

c.

$$M' = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2$$

M_1 rotation d'angle $\theta = wt$ de centre A_1

M_2 rotation d'angle $\theta = wt$ de centre A_2

Une rotation est une similitude de rapport 1 donc d'après 2/ M' décrit une rotation de centre A et d'angle $\theta = wt$. A est le barycentre de (A_1, α_1) et (A_2, α_2) .