

Correction Problème

27/04/2024

Partie A

1.

$$g(u) = f\left(\frac{1+\tan(u)}{2}\right).$$

f est une fonction dérivable ainsi que la fonction $h(u) = \frac{1+\tan(u)}{2}$ donc $g = f \circ h$ est bien une fonction dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$.

$$g'(u) = h'(u) \times f'(h(u)) = \left(\frac{1}{2\cos^2(u)}\right) \times \phi(h(u)) = \left(\frac{1}{2\cos^2(u)}\right) \times \frac{1}{2\left(\frac{1+\tan(u)}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1+\tan(u)}{2}\right) + 1}$$

$$g'(u) = \left(\frac{1}{2\cos^2(u)}\right) \times \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2(u)}\right)} = 1 \text{ donc } g(u) = u + C \text{ et } g \text{ est bien une fonction affine.}$$

2.

$$\int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} dt = f(1) - f(0). \text{ Or on note que : } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = f(1) \text{ et } g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f(0).$$

D'après le résultat obtenu en 1. : $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + C$ et $g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} + C$ donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} dt = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Partie B

$$I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt.$$

1.

Soit la fonction $f(t) = t(1-t) = t - t^2$ définie sur $[0, 1]$.

$f'(t) = 1 - 2t$ donc f est positive ou nulle et admet un maximum lorsque $t = \frac{1}{2}$ avec $f(1/2) = \frac{1}{4}$.

soit $\forall t \in [0, 1] \quad 0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4}$ donc $0 \leq t^n(1-t)^n \leq \frac{1}{4^n}$, il en résulte que :

$$0 \leq I(n, n) \leq \int_0^1 \frac{1}{4^n} dt = \frac{1}{4^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(n, n) = 0.$$

2.

$$I(p+1, q+1) = \int_0^1 t^{p+1} (1-t)^{q+1} dt.$$

En intégrant par partie :

$$\int f' g = [fg] - \int g' f$$

$$f' = t^{p+1} \quad f = \frac{t^{p+2}}{p+2}$$

$$g = (1-t)^{q+1} \quad g' = -(q+1)(1-t)^q$$

$$I(p+1, q+1) = \left[\frac{t^{p+2} (1-t)^{q+1}}{p+2} \right]_0^1 + (q+1) \int_0^1 t^{p+2} \frac{(1-t)^q}{p+2} = \frac{q+1}{p+2} \int_0^1 t^{p+2} (1-t)^q dt$$

$$I(p+1, q+1) = \frac{q+1}{p+2} I(p+2, q).$$

3.

$$I(n, n) = \frac{n}{n+1} I(n+1, n-1) = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} I(n+2, n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(n+n)} I(n+n, 0)$$

$$I(n, n) = \frac{n!n!}{(2n)!} I(2n, 0)$$

$$I(2n, 0) = \int_0^1 t^{2n} dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

$$\text{donc } I(n, n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

PARTIE C**1**

$$\sum_{k=1}^n 2^k t^k (1-t)^k = \sum_{k=1}^n (2t(1-t))^k = 2t(1-t) \times \frac{1 - (2t(1-t))^n}{1 - 2t(1-t)}$$

$$S = \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} - 1 - \sum_{k=1}^n 2^k t^k (1-t)^k = \frac{1}{1 - 2t(1-t)} - 1 + \left(1 - \frac{1}{1 - 2t(1-t)}\right) + \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{1 - 2t(1-t)}$$

$$S = \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{1 - 2t(1-t)}.$$

2

$$v_n = 2^n I(n, n)$$

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n 2^k \int_0^1 t^k (1-t)^k dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (2t(1-t))^{2k} dt = \int_0^1 \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1} - \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{1 - 2t(1-t)} dt \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 - \int_0^1 \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{1 - 2t(1-t)} dt \end{aligned}$$

Or d'après la partie 1/ :

$$0 \leq t^{n+1}(1-t)^{n+1} \leq \frac{1}{4^{n+1}} \text{ donc } 0 \leq \int_0^1 \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{1-2t(1-t)} dt \leq \frac{2^{n+1}}{4^{n+1}} \int_0^1 \frac{dt}{2t^2-2t+1} = \pi \frac{2^n}{4^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2^{n+2}} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{1-2t(1-t)} dt = 0$$

Il en résulte que : $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{\pi}{2} - 1$.