Exercice 1 - BAC C - 1982 - Besançon

1/ Calculer la somme suivante pour x réel et p entier naturel :

$S=1-x+x^2-\ldots+(-1)^p x^p$

$S-1=-x(1-x+x^2+\ldots+(-1)^{p-1}x^{p-1})=-x(S-(-1)^p x^p)$

$S(1+x)=1+(-1)^p x^{p+1}$

$$S=\frac{1+(-1)^p x^{p+1}}{1+x}$$

2/ Montrer que quels que soient les entiers naturels x et n, l'entier $x^{2n+1}+1$ est divisible par x+1.

Posons p=2n alors $S=\frac{1+x^{2n+1}}{1+x}$

Or S est un entier relatif donc $x^{2n+1}+1$ est divisible par 1+x.

3/ En déduire que, quel que soit l'entier naturel p, $(2^{(2^p)})^k+1$ est divisible par $2^{(2^p)}+1$ si l'entier k est impair.

Prenons $x=2^{2^p}$: $(2^{2^p})^{2n+1}+1$ est divisible par $(2^{2^p})+1$

Si k impair, alors $(2^{2^p})^k+1=(2^{2^p})^{2n+1}+1$ est donc divisible par $(2^{2^p})+1$

4/ Démontrer qu'une condition nécessaire pour que 2^m+1 soit premier est que l'entier naturel m soit une puissance de 2.
On ne cherchera pas à étudier si cette condition est suffisante.

Si m est impair et $m \neq 1$ alors m=2n+1 et $n \neq 0$ et $2^{2n+1}+1$ est divisible par 3 d'après 2/. Donc 2^m+1 non premier.

Donc m est pair alors m=2u. Mais si u est impair alors $2^{2u}+1=(2^2)^u+1$ est divisible par 5, d'après 3/.

Donc u est pair soit $m=2^2$xq. De la même façon, $(2^{2^2})^q+1$ ne sera premier que si q est pair.

Par récurrence on en déduit que m doit être une puissance de 2 pour que 2^m+1 soit premier.