

Exercice 1 – BAC C – 1982 – Besançon

1/ Calculer la somme suivante pour x réel et p entier naturel :

$$1-x+x^2-\dots+(-1)^px^p$$

2/ Montrer que quels que soient les entiers naturels x et n , l'entier $x^{2n+1} + 1$ est divisible par $x + 1$.

3/ En déduire que, quel que soit l'entier naturel p , $(2^{(2^p)})^k + 1$ est divisible par $2^{(2^p)} + 1$ si l'entier k est impair.

4/ Démontrer qu'une condition nécessaire pour que $2^m + 1$ soit premier est que l'entier naturel m soit une puissance de 2.

On ne cherchera pas à étudier si cette condition est suffisante.